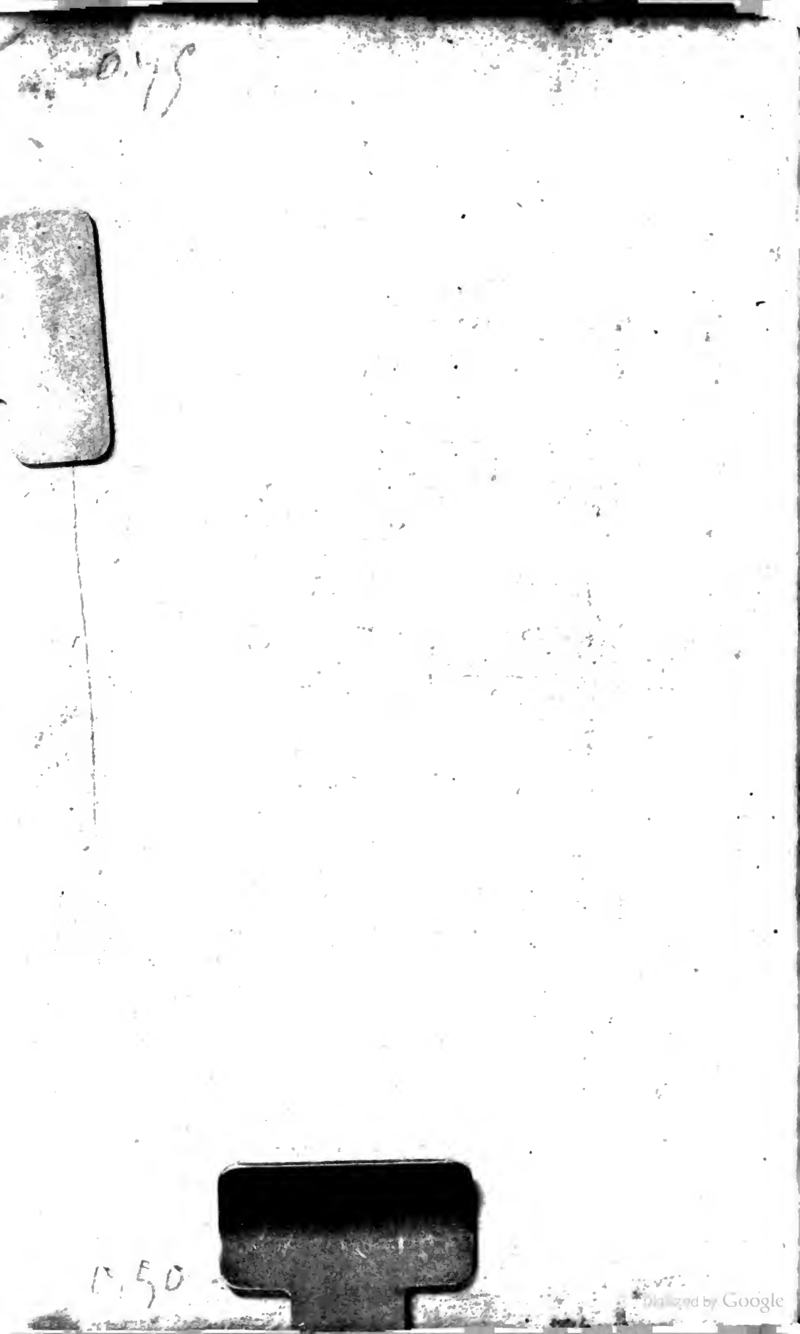




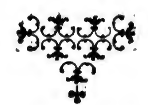
NOUVELLES TABLES LOXODROMIQUES, OU APPLICATION DE LA THEORIE DE LA VÉRITABLE FIGURE DE LA TERRE, A LA CONSTRUCTION DES CARTES MARINES REDUITES.

Avec des Remarques préliminaires sur les Mesures qui ont servi à découvrir & à déterminer cette Figure.

Par M. MURDOCH.

Traduit de l'Anglois.

Par M. DE BRE'MOND, *de l'Académie Royale des Sciences, de la Societé Royale de Londres, &c.*



A PARIS, RUE S. JACQUES.
Chez DURAND, Libraire à S. Landry, & au Griffon.

M. DCC. XLII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

A MONSEIGNEUR
LE COMTE
DE MAUREPAS,
MINISTRE
ET
SÉCRETAIRE D'ÉTAT
DE
LA MARINE.

MONSEIGNEUR,

VOUS verrez dans cet Ouvrage, que les Etrangers se hâ-

tent de faire usage de nos Découvertes; & qu'une Nation qui se pique de pousser l'Art de la Navigation à un haut point de perfection, applique déja à cet Art, les Nouvelles Régles qui suivent des recherches & des travaux des François. Vous y verrez le cas qu'on fait en Angleterre, d'une Découverte dont la gloire vous est dûë. Ce n'est que sous votre Ministere qu'on a vû former d'aussi grandes Entreprises pour les Sciences; & que pendant qu'une protection généreuse & éclairée les fait fleurir dans les murs du Louvre, un Esprit vaste & uni-

verſel, envoye dans les Régions les plus éloignées, chercher les connoiſſances qu'un ſeul Païs, quelque fertile qu'il ſoit, ne ſçauroit produire, & répand, pour ainſi dire, l'Académie des Sciences par tout l'Univers.

Toute l'Europe a vû avec admiration, cette Entrepriſe qui n'a paru qu'ordinaire à la France. Les Ouvrages qui en ſont le réſultat, devoient être dédiés à celui par les ordres de qui elle a été éxécutée. Des Découvertes auſſi utiles à la Navigation appartenoient au Miniſtre, au ſoin de qui elle eſt commiſe: enfin c'étoit la ſeule

maniere que j'eusse de vous marquer ma respectueuse reconnoissance pour des bienfaits, qui, par vous répandus sans cesse, sur tous les Gens de Lettres, sont tombés jusques sur moi.

Quoique dans l'Ouvrage dont je vous offre la Traduction, l'Auteur reconnoisse assez que ce n'est que depuis le Voyage fait au Pôle par les Académiciens François, qu'on connoît avec certitude la Figure de la Terre, un interest national, dont il est difficile, même aux Philosophes, de se défendre, l'a fait dans quelques endroits parler, comme s'il vouloit associer sa

Nation à cette Découverte. Cependant la fidélité de l'Auteur fait qu'on trouve dans son Livre même, les preuves & les faits qui en assurent la gloire à la France.

Malgré ce qu'un autre Auteur Anglois prétend qu'a pensé Strabon sur l'applatissement de la Terre, celui-ci a l'équité d'avouer que tous les Philosophes & les Géographes n'attribuoient point à la Terre d'autre Figure que celle d'un Globe parfait, avant la fameuse Expérience faite à Cayenne en 1672. par M. Richer Astronome François. La diminution de la pe-

ſanteur vers l'Equateur qu'il découvrit, fut le fondement de tous les raiſonnemens de MM. Huygens & Nevvton; & les Mathematiciens François en auroient conclu comme eux l'Applatiſſement de la Terre, s'ils n'euſſent été plus circonſpects dans l'uſage d'une Découverte qui, bien éxaminée, ne prouvoit que la probabilité de cet Applatiſſement. Ils crûrent, malgré cette Experience qui leur appartenoit, que la ſeule maniere de s'aſſurer de la vraye Figure de la Terre, étoit d'en juger, non par des Théories qui permettoient toujours quel-

que exception, mais par des mesures actuelles, qui ne pouvoient plus laisser aucune incertitude.

On sçait ce qui a été fait en France pour déterminer par ces mesures, la Figure de la Terre. Une Meridienne tracée d'une extrêmité du Royaume à l'autre, avec le plus d'exactitude qui fut possible, ou qui fut connuë dans ce tems-là : des Cercles paralelles à l'Equateur, mesurés avec le même soin, sont des Ouvrages que jamais aucune Nation n'avoit entrepris. Mais ce n'est que sous le Regne de Louis XV. qu'on a vû par-

tir des Academiciens pour aller à l'Equateur & au Cercle Pôlaire, achever de terminer cette grande Question, & fixer la Figure de la Terre. Ces Obelisques, ces Colosses, qui ont fait l'admiration de l'Antiquité; ces Pyramides, dont l'Egypte s'est tant glorifiée, n'etoient que des masses de pierre inutiles; & de si grands travaux, pour des desseins frivoles, font plus sentir la puissance, qu'ils ne font connoître la sagesse de ceux qui les ont entrepris. Les Ouvrages des François seront à jamais des monumens de la sagesse & de la puissance du

Prince qui les a fait exécuter; & les mesures de la Terre seront utiles aussi long-tems que la Terre durera.

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble, &
très-obéïssant Serviteur,
DE BRE'MOND.

A MILORD GEORGES GRAHAM.

MILORD,

LE rapport qu'a cet Ouvrage avec la Profession que

vous avez choiſie pour ſervir votre Patrie, m'a fait prendre la liberté de vous le préſenter. Je profite de cette occaſion pour déclarer publiquement le ſincere reſpect & la reconnoiſſance avec leſquelles je ſuis,

MILORD,

Votre très-humble, très-obéïſſant, & très-obligé Serviteur,
PATRICE MURDOCH.

TABLE DES MATIERES

Contenues dans ce Volume.

REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

ESSAI.

NOUVELLES TABLES LOXODROMIQUES, *OU* APPLICATION DE LA THEORIE DE LA VÉRITABLE FIGURE DE LA TERRE, *A LA CONSTRUCTION* DES CARTES MARINES RÉDUITES.

REMARQUES PRELIMINAIRES.
De la Grandeur & Figure de la Terre.

I.

TOUTES les fois qu'on ſe propoſe de faire quelque changement à une Régle établie, il eſt naturel de commencer par rendre compte des

motifs que l'on a eû de s'en écarter, & de la nouvelle route qu'on a suivie. Je pourrois à la vérité m'en dispenser, le principe que suppose mon Ouvrage étant généralement reçu : mais des personnes moins au fait des Auteurs qui ont écrit sur ces matieres, ne seront peut-être pas fâchées de trouver réünies sous un même point de vuë les premieres idées que l'on s'étoit formées de la Figure de la Terre, & les connoissances certaines que l'on en a acquises depuis.

Tant que les premiers hommes ont vécu rassemblés dans le lieu de leur naissance, ils ont dû imaginer la Terre comme une plaine immense, coupée par des montagnes, des vallées, des lits de Rivieres, &c. Lorsqu'ils ont commencé ensuite à se disperser & à se répandre dans des Pays éloignés, il est tout naturel que la hauteur différente des Corps célestes sur leur nou-

vel Horifon, la longueur différente des jours & des nuits, & les dégrés différens de froid & de chaud, aïent excité leur attention, & piqué leur curiofité : ces Phénoménes ne leur auront peut-être point fait foupçonner d'abord le changement réel de leur horizon, & ils n'auront pas été jufqu'à penfer que la Terre étoit convexe. Il n'eft pas douteux cependant qu'ils n'ayent dû remarquer que le fommet d'une Montagne, ou le haut d'une Tour, paroiffent d'autant plus élevés, que l'on en eft plus près & *vice verfâ*. Peut-être ils fe contentoient de l'explication de l'élévation & l'abbaiffement des Corps céleftes que leur fourniffoit cette obfervation, & pour ce qui eft de la différence du chaud & du froid, ils l'attribuoient à une différence fuppofée de la diftance du Soleil. Au refte il n'eft pas poffible de fçavoir, fi ce n'eft par conjecture,

dans quel tems on a connu la convexité de la Terre, & quel a été le premier Auteur de cette découverte.

On ne peut disconvenir que ce sentiment ne soit fort ancien. *Thales* de *Milet* 600 ans avant J. C. étoit en état de prédire les Eclipses *. Il falloit donc que la sphéricité de la Terre fut connuë non-seulement de *Thales*, mais encore des Astronomes qui l'avoient précédé; autrement comment auroit-il eû des Observations pour composer la Théorie des Mouvemens célestes? & son Disciple *Anaximandre* auroit-il osé entreprendre de mesurer la circonférence de la Terre?

Thales pouvoit avoir tiré cette connoissance des *Phéniciens* & des *Egiptiens* parmi lesquels il avoit voyagé. Il est assez naturel de penser que les *Phéniciens*, Peuples occupés du Commerce & de la Navigation, ont eû bien des

* *Herodote*. Lib. I.

occaſions de découvrir la Figure de la Terre ; mais il leur ſuffiſoit de remarquer que quand on abandonne le rivage, les Terres & les Côtes les plus élevées, ſemblent rentrer dans le ſein des Eaux, & qu'elles ſe cachent d'autant plus que l'on s'éloigne davantage, juſqu'à ce qu'elles diſparoiſſent tout-à-fait ; & qu'au contraire en approchant de terre, l'on commence par appercevoir le ſommet des Montagnes, & que les Plaines ſe découvrent enſuite à meſure que le Vaiſſeau avance.

Ne peut-on pas dire auſſi avec beaucoup de vrai-ſemblance que les *Egiptiens* ont fait chez eux de très-bonne heure de ſemblables Obſervations ? S'ils n'alloient point en Mer, le Nil formoit tous les ans une Mer dans leur Païs. Ce Païs étoit inondé. On voyageoit en Barques dans les ruës des Villes. Et les Villes élevées au milieu des Eaux, étoient une image des Iſles

de la Mer Egée *. On ne manquoit ni d'Horizon & d'objets propres pour les Obſervations, ni d'hommes pénétrans en état d'en profiter.

Quoiqu'il en ſoit, de ces conjectures ; dès que la Géométrie vint à être cultivée, & que l'on eut trouvé que par l'hypothèſe de la ſphéricité de la Terre, on pouvoit rendre raiſon des Phénoménes les plus embarraſſans & de l'Aſtronomie, & de la Géographie, on ſe crut en droit de conclure que la Figure de la Terre ne pouvoit être que ſphérique.

On étoit naturellement amené à eſſayer de déterminer les dimenſions & la grandeur de cette Sphére, & ce travail qui fut dès lors commencé, n'eſt pas encore entierement fini. On penſa à différentes Méthodes, toutes également ſimples & exactes dans la Théorie, & toutes également difficiles

* *Ibid.* Lib. II.

dans l'exécution, & ſouvent même impraticables.

Du nombre des dernieres ſont toutes ces Méthodes qui ne ſont fondées que ſur les Obſervations terreſtres; car du ſommet d'une Montagne élevée, vouloir meſurer l'angle que fait avec la perpendiculaire une ligne tirée à l'extrêmité de l'Horizon, & d'après cet angle & la hauteur de la Montagne, calculer le demi-Diametre de la Terre, c'eſt recourir à une Méthode impraticable ou du moins défectueuſe. Car eſt-il bien facile de connoître exactement la hauteur perpendiculaire, ou les diſtances des Montagnes? Eſt-on bien ſûr, même avec le meilleur Inſtrument, de meſurer ſans erreur, l'angle que l'on cherche? Enfin la hauteur des Montagnes les plus élevées, eſt-elle aſſez conſidérable par rapport au demi-Diametre de la Terre, pour que la moindre erreur qui ſe ſera

glissée dans leurs mesures, ne se multiplie pas infiniment, quand on viendra à l'appliquer à la Figure de la Terre.

Dans les Méthodes employées avec le plus de succès, on suppose connuës la distance de deux lieux sur le même Méridien, & les différentes hauteurs méridiennes d'une étoile fixe dans les deux endroits, & comparant la distance donnée avec la différence de hauteur, on trouve le rapport de cette distance à la circonférence de la Terre. Au lieu d'une Étoile fixe, on peut se servir du Soleil, pourvû que l'on en prenne la hauteur méridienne dans les deux endroits le même jour. Avec une Figure, tout ceci s'entendra mieux.

Que *CABN* (*Fig.* 1re.) représente un Méridien de la Terre *c. a. d.* un cercle ou le plan qui passe par le centre & les pôles, couperoit le Globe. *A* & *B* sont deux endroits sur la circonférence de ce Cercle, dont la distance

AB eſt connuë. *AD*, *GBD*, Tangentes du Cercle en *A* & *B*, ſont les lignes ſuivant leſquelles le plan du Méridien coupe les Horizons des deux lieux, & *SA*, *SB*, ſont deux lignes ou rayons viſuels qui viennent de l'Étoile aux lieux *A* & *B*. On ſuppoſe encore, comme accordé ou prouvé,

1. Que l'arc *AB* a le même rapport à toute la circonférence *ABNA*, que l'angle *ACB* à quatre angles droits. *6. El. 33.*

2. Que *ZA*, ligne à plomb en *A*, eſt perpendiculaire à l'Horiſon *AD*, comme l'eſt la ligne à plomb *zB* à l'Horizon *GBD*, par conſéquent *ZA* & *zB* étant prolongées, ſe rencontreront dans le centre *C*. 3. *El.* 19.

3. Que la diſtance d'une Étoile eſt incomparablement plus grande que le Diamétre de la Terre, & que l'on peut regarder les lignes *SA*, *SB*, comme paralelles.

Maintenant ſi on fait en *A* & en *B* des Obſervations de la hauteur méridienne de l'Étoile, ces hauteurs auront pour meſure les angles *SAD*, *SBG*, & ſi l'on tire *BE*, *BF*, paralellement à *AZ*, *AD*, l'angle *SAD* ſera égal à *SBF*, car *SA* eſt paralelle à *SB*, par conſéquent l'angle *FBG*, donnera la différence des hauteurs obſervées : mais parce que *zBG*, *EBF*, ſont des angles droits, retranchant *zBF* commun à tous les deux, il reſtera *FBG* égal à *zBE*, & comme *BE* eſt paralelle à *CAZ*, l'angle *zBE* eſt égal à *BCA*, c'eſt-à-dire, *BCA* eſt égal à la différence des hauteurs obſervées : d'où je conclus que, comme cette différence eſt à quatre angles droits, de même eſt l'arc *AB*, dont la grandeur eſt connuë en meſures quelconques à toute la circonférence en même meſure.

Il en auroit été de même, ſi au lieu

des hauteurs ſur l'Horizon, on eut obſervé les diſtances au Zénith *SAZ*, *SBz*, car leur différence auroit de même donné *zBE* égal à *BCA*.

C'eſt à cette Méthode, ou à d'autres qui peuvent s'y rapporter, que nous devons toutes les meſures de la circonférence de la Terre, que des Auteurs de quelque célébrité depuis *Eratoſthenes* juſqu'à préſent ont déterminées. J'ai copié ici, d'après *Varéne* & M. de *Maupertuis*, les plus remarquables, & je les ai diſpoſées dans l'ordre ſuivant.

La circonférence de la Terre eſt de

Suivant	STADES.	MILIES Romains de 8 Stades.
Eratoſthénes.	250000	31250
Hipparque.	275000	34375
Poſſidonius.	240000	30000
Strabon & Ptolémée.	180000	22500
Les Arabes.		20340

Suivant	PERCHES du Rhin, de 12 pieds	TOISES de France.	MILLES Anglois de 5280 pieds.
Norwood.	10701219.	20679000.	25036 $\frac{1}{11}$.
Picard.	10630116.	20541600.	24369 $\frac{72}{100}$.
Musschenbroek.	10625107.	20531920.	24858.

En multipliant par la fraction $\frac{113}{355}$ chacun de ces nombres, on connoîtra tout d'un coup le Diamétre de la Terre en mesures de même valeur, & l'on aura la longueur du dégré en divisant ces mêmes nombres par 360.

REMARQUE. Le pied de *Paris* est au pied d'*Angleterre* à peu près comme 38,355 à 36 : le pied du *Rhin* est au pied *Anglois* comme 105 à 102, & l'ancien pied *Romain* est à celui de *Paris* dans le rapport de 11 à 12.*

On a dû voir dans cette Table que les mesures des Anciens différent considérablement entr'elles. C'est ce qui a fait soupçonner que leurs Stades

* Il seroit à souhaiter que ces rapports fussent corrigés d'après les meilleurs Observateurs.

n'avoient pas toutes la même longueur, comme en effet il feroit très-difficile de prouver qu'elles l'euffent. *Vitruve*, *Pline*, & le plus grand nombre des Auteurs, donnent huit Stades au Mille *Romain* de 1000 pas, ou 5000 pieds; mais M. *Caffini* fur un paffage de *Strabon*, trouve qu'au Sud * de la *France*, le Mille a au moins 9 Stades. Et les mefures que nous avons des Piramides d'Égypte, ne font que jetter du doute & de l'incertitude.

Suppofé que la Stade chez les Anciens Géographes, eut été une mefure conftante & invariable, comme naturellement elle devoit l'être, il faudroit rejetter cette grande différence entre les mefures de la Terre fur les mauvais Inftrumens que l'on employoit, & fur le peu de foin avec lequel on faifoit les opérations nécef-

* Hiftoire de l'Académie des Sciences.

ſaires. Si l'on veut ſçavoir combien les Inſtrumens des Anciens étoient défe-ctueux, il n'y a qu'à ouvrir l'*Arenarius* d'*Archiméde*, & l'on y verra prendre le Diamétre apparent du Soleil, par le moyen d'un Cylindre éloigné de l'œil, juſqu'à ce qu'il cache le corps entier de l'Aſtre. *Eratoſthénes* n'étoit pas mieux aſſorti dans ſa fameuſe Obſervation, puiſqu'il n'avoit pour meſurer la diſtance du Soleil au Zénith d'*Alexandrie* *, qu'un Hémiſphére creux où étoit placé un Gnomon. Enfin, il ne paroît pas que les Anciens aïent penſé à meſurer éxactement ſur le terrein la diſtance des lieux : ils s'en ſont tenus à une eſtime groſſiére, & ils ne ſe ſont guéres embaraſſés, ſi les lieux étoient préciſément dans le même Méridien.

Les Modernes l'ont bien emporté ſur les Anciens, & pour l'éxactitude des Opérations, & pour la profondeur

* *Fragment. poſt Aratum. Edit. Ox.*

de la Théorie. Dès que les Arts ont recommencé à fleurir, on a fait de grands Inſtrumens bien diviſés, on a meſuré avec préciſion les diſtances des lieux, & on a tenu un compte rigoureux de toutes les Déviations, ſoit à l'égard de la ligne horizontale, ſoit à l'égard du Méridien; il eſt venu un tems que l'on a adapté les Téleſcopes aux Inſtrumens, que cette nouvelle application a donné avec beaucoup plus de juſteſſe les Angles, tant au-deſſus de l'Horizon, qu'à l'Horizon; & enfin que les Inſtrumens ont acquis un dégré ſingulier de correction & de perfection. Autrement quel embarras, que d'être obligé de meſurer ſur le terrein, des diſtances très-grandes, ainſi que l'a fait M. *Norwood*, qui a meſuré à la Chaîne, la diſtance de *Londres* à *York*. Il a paru, & plus ſimple, & infiniment plus commode de meſurer avec la plus grande préciſion,

une petite diſtance, comme une Baſe avec laquelle on liât une ſuite de Triangles, & dont on déduisît la valeur d'un Arc du Méridien d'une longueur convenable.

Il n'eſt pas difficile en effet de concevoir que dans une Figure composée d'un certain nombre de Triangles dont tous les Angles ſont connus, & dont les deux qui ſe touchent, ont un côté commun, ſi la longueur d'un des côtés eſt donnée, les autres côtés ſe puiſſent trouver trigonométriquement; & l'on voit avec la même évidence que l'on eſt en état de connoître par Obſervation Aſtronomique, la poſition de cette ſuite de Triangles à l'égard du Méridien. Suppoſant par conſéquent une Méridienne paſſer ſur un Angle de la Figure & des Perpendiculaires tirées des autres Angles, ſe joindre à la Méridienne, on connoîtra les Segmens interceptés: & dèſlors on peut

meſurer

mesurer un arc du Méridien de la longueur que l'on veut. Il faut seulement prendre garde qu'il y ait le moins de triangles qu'il est possible, que ces triangles se suivent à peu près dans la direction du Méridien, & que les stations (ou extrémités des angles), soit qu'on se serve de fléches d'Eglises, &c. soit que l'on éleve des signaux, soient choisies de façon qu'il ne se trouve aucun des angles trop petit. Mais M. de *Maupertuis* dans sa *Figure de la Terre déterminée*, &c. a expliqué au mieux toutes ces attentions, en décrivant le détail de ses opérations, & les a renduës sensibles par des exemples convenables, c'est pourquoi j'y renvoye.

II.

Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent de la Figure de la Terre, doit présenter l'idée d'une Sphére parfaite;

& en effet, elle en approche ſi fort, que par la méthode qui vient d'être expliquée, il n'eut pas été poſſible de découvrir qu'elle n'eſt pas éxactement ſphérique, ſi l'on s'étoit contenté d'arcs meſurés à peu près ſous la même latitude, ſurtout dès qu'on ne ſoupçonnoit point à la Terre une autre Figure, ou que l'on n'en cherchoit pas; car quand *Norwood*, *Picard*, & beaucoup d'autres habiles Gens en *France* & en *Angleterre*, auroient, chacun de leur côté, été aſſez heureux pour déterminer avec toute l'exactitude poſſible la véritable grandeur du dégré qu'ils avoient entrepris de meſurer, les différences de leurs meſures n'auroient pas été aſſez conſidérables pour ne pouvoir pas être attribuées avec apparence de raiſon aux erreurs qui ſont inévitables dans de telles opérations. Ainſi donc quelque différence que l'on eut trouvée dans la longueur des dégrés meſurés

par différens Mathématiciens, on ne ſe ſeroit peut-être jamais aviſé de ſoupçonner que la Terre * n'eut pas été une Sphere parfaite, ſi M. *Richer* par ſa célébre obſervation de 1672. n'eut découvert que le même pendule fait plus lentement ſes vibrations près de l'Équateur qu'en *France*. Mais cette obſervation faite, la véritable Figure de la Terre ne pouvoit pas être longtems ignorée; car *Huygens* & *Newton* vivoient alors, & ces deux grands Génies n'eurent pas plutôt appris l'expé-

* On a crû (*Philoſ. Tranſact.* 438.) que *Polybe* avoit déja connu la Figure de la Terre que lui donne la force centrifuge : mais le paſſage de *Strabon* qu'on cite pour garant de ceci, *Lib.* II. p. 91. *Edit. Pariſ.* me paroît trop obſcur & équivoque pour en pouvoir tirer cette conſéquence : Ou ſi *Polybe* a entendu par l'élévation vers l'Equateur dont il eſt parlé, autre choſe, qu'une chaîne de Montagnes, qui arrêtant les Nuages portés par les vents *Etéſiens* en grande quantité, faiſoient de la pluye & de la fraîcheur, il paroît au moins que ni *Poſſidonius*, ni *Strabon* ne l'ont pas bien compris.

rience, qu'ils en virent la véritable application. Pour rendre cette matiere plus intelligible, & montrer le rapport qui eſt entre le mouvement d'un Pendule & la Figure de la Terre, il faut commencer par expliquer ce que l'on entend par *Force centrifuge*, expreſſion abſolument néceſſaire dans l'occaſion préſente.

C'eſt une loi du Mouvement connuë, qu'un Corps mû par un autre Corps, continuë après le choc à ſe mouvoir avec le même dégré de mouvement dans la direction de l'impulſion, & s'il y a deux, trois, ou un nombre quelconque fini d'impulſions, le Corps qui les reçoit ſe meut toujours en ligne droite avec une viteſſe & une direction compoſées des quantités & des directions de toutes les différentes impulſions.

Il ſuit par conſéquent qu'un Corps étant mû dans un Cercle, ou dans toute

autre Courbe, il eſt retenu dans cette Courbe par une force qui agit ſans ceſſe ſur lui, telle eſt la force que la main exerce ſur une pierre liée dans une fronde, & telle ſe peut imaginer la force qui retient les Corps céleſtes dans leurs Orbites.

L'action eſt toujours égale & contraire à la réaction ; ſi l'on veut donc prendre la tenſion de la fronde pour l'effet d'une force qui agit vers la main comme centre, cette force alors eſt nommée *Force centripéte*, & lorſqu'on la regarde comme une force qui agit ſur la pierre dans une direction contraire, cette même force s'appelle *Force centrifuge*. Tous les Corps qui ſe meuvent autour d'un centre ou d'un axe, ont réellement une force centrifuge, quoique ſes effets ne ſoient pas toujours bien marqués.

Dans les Corps ſolides qui font leur révolution autour d'un axe, chaque

particule tend à s'éloigner du centre; mais l'effet eſt détruit par la puiſſance de la cohéſion des parties; il n'en eſt pas de même des fluides & des Corps mols, ainſi qu'on peut le voir dans le mouvement circulaire d'un ſeau plein d'eau ſuſpendu par ſon ance; dans la rotation d'une meule à aiguiſer, & dans bien d'autres exemples qui ſont ſous les yeux de tout le monde.

C'eſt une loi de la force centrifuge que ſur les mêmes particules, ou des particules égales de matiere (le tems des révolutions étant le même) l'effet eſt proportionnel au demi-diamétre du Cercle décrit. D'où l'on peut aiſément conclure que *dans le mouvement des Corps fluides l'effet total, ou la ſomme des forces, centrifuges eſt proportionnel au quarré du Rayon de la Révolution.*

Car ſi l'on ſuppoſe ſur la ligne droite *CB* (*Fig.* 2.) *CA*, *CB*, de la longueur de deux petits tuyaux remplis d'un

fluide homogéne, & tournans en même-tems autour du centre *C*, & si de *A* & *B*, on tire à angles droits les lignes *AE*, *BD*, proportionnelles à *CA*, *CB* : alors *CED* sera une ligne droite, & la ligne *pt* paralelle à *AE*, & rencontrant les côtés du triangle en *p* & *t*, représentera la force centrifuge à la distance *pC*. Mais cette force centrifuge étant multipliée par une particule donnée du fluide *pq*, le rectangle *qt*, sera proportionnel à la force motrice, ou au *momentum* de cette particule, & la somme de tous les *momens* sera comme la somme de tous les petits rectangles *qt*, c'est-à-dire, comme l'aire du triangle *CAE*, de même la somme de tous les *momens* ou forces centrifuges dans le long tuyau, sera comme l'aire *CBD*, & ces aires sont en raison doublée des côtés *CA*, *CB*, 6. *El.* 19.

Si l'on veut joindre l'expérience à la Théorie, il n'y a qu'à prendre un

tuyau de cuivre de la forme de celui qui eſt repreſenté dans la Figure 3ᵉ. le remplir de Mercure, ou de quelque liqueur colorée juſqu'à la ligne *BD*, le fixer ſur une machine qui tourne horizontalement d'une viteſſe égale, & avoir attention que l'axe de la jambe *DC* ſoit dans l'axe de mouvement. Pour lors le fluide dans une des branches s'abaiſſera de *D* en *E*, & montera dans l'autre branche de *B* en *G*, & *FG* différence des hauteurs des colonnes *AG*, *CE*, ſera comme la ſomme des forces centrifuges dans le rayon de révolution *CA*, ce qui eſt évident par l'Hydroſtatique. Rien n'eſt plus aiſé que de meſurer cette différence *FG* par le moyen d'une échelle placée à côté d'une fenêtre faite à la branche *AG*, & remplie par un morceau de verre, afin de voir le fluide.

Il eſt facile de varier cette expérience de bien des manieres. On peut

ſuppoſer (comme dans la Figure 4.) le tube tourner autour d'un axe qui diviſe *AC* inégalement au point *c*, par exemple, en ce cas la différence des hauteurs *AG*, *CE*, ſera proportionnelle à la différence des quarrés de *Ac*, *cC*, compenſation faite de ce qui appartient à la tenacité & à l'adhéſion du fluide. Il faut qu'il y ait ici un tuyau *cS* directement dans l'axe du mouvement pour fournir le fluide qui monte dans les deux branches.

Il s'agit préſentement d'appliquer cette expérience à la Figure de la Terre. Imaginons avec le Chevalier *Newton*, qu'au travers de la Figure 5, qui repreſente le Globe de la Terre, & dont l'axe eſt *Pp*, & *Qq* le diamétre de l'Equateur, il paſſe un ſiphon, ou tuyau *PCQA* rempli d'eau depuis *P* juſqu'en *Q*. Si la Terre eſt une Sphére de matiére homogéne, d'égale gravitation à égales diſtances du cen-

tre, & en repos, les colonnes de fluide dans les tuyaux *PC*, *QC*, ſe contrebalanceront. Mais ſi la Sphére vient à être miſe en mouvement, & que ſon mouvement ſur ſon axe *Pp* ſoit égal, les forces centrifuges du fluide dans la branche *CQ*, lui feront perdre quelque choſe de ſon poids, & l'équilibre ne pourra être rétabli que quand il aura paſſé aſſez du fluide contenu en *PC*, pour que tout le poids en *AC* égale la ſomme du poids en *PC*, & des forces centrifuges : D'où il ſuit.

1°. Que la Terre dans l'état actuel n'eſt point ſphérique, autrement ſon mouvement diurne feroit refluer l'Océan ſur les parties voiſines de l'Equateur, & de chaque côté y cauſeroit une grande inondation & une inondation générale, tandis que les Pays voiſins des Pôles demeureroient à ſec, ou du moins il y auroit des Côtes d'une

hauteur immense au-dessus du niveau de l'Océan.

2°. Que si la Terre a été dans son origine fluide & sphérique, le mouvement diurne a dû nécessairement élever les parties voisines de l'Equateur, & abaisser les parties voisines des Pôles; & en conséquence du mouvement de rotation, ces dernieres se seront toujours raprochées du centre, jusqu'à ce que la Terre ait eu la Figure d'un Sphéroïde applati, engendré par la révolution d'une Ellipse autour de son petit Diamétre.

* Soit (*Fig. 6.*) *CZMD* une Sphére fluide, homogéne, en repos, & dont les particules s'attirent en raison inverse des quarrés des distances. Qu'on la conçoive divisée en tranches très-par des plans perpendiculaires à son minces axe; & que les tuyaux *NM*,

* Addition que l'Auteur a envoyée au Traducteur.

nm, qui communiquent par un canal dans l'axe, repréſentent deux de ces tranches quelconques. Il eſt conſtant (*Prop.* 73, *Lib.* I. *Princ. Neut.*) qu'une particule *N* eſt attirée vers le centre par une force proportionnelle à ſa diſtance *NC*, ainſi en ſommant toutes les forces des particules en *ZN* (c'eſt-à-dire les poids de la colonne *ZN*) ſeront comme la différence des quarrés de *CZ*, *CN*, ou bien comme le quarré de l'ordonnée *NM*. Mais la colonne *NM* eſt en équilibre avec *ZN*, la Sphére étant en repos; par conſéquent le poids, ou la preſſion totale des particules de la colonne *NM* dans une direction perpendiculaire à l'axe, eſt comme le quarré de ſa hauteur. La même conſéquence ſe tirera de ce que l'attraction d'une particule *x* de la colonne *NM*, dans la direction *xN*, eſt en raiſon compoſée de ſa diſtance au centre *xC*, & du ſinus de l'angle

xCN, laquelle ſe réduit au rapport de *xN*.

Dans le Sphéroïde Géométrique applati *CZRD*, de matiere homogéne, (ſoit qu'on le veuille ſolide, ſoit qu'étant fluide, l'on ſuppoſe qu'il conſerve ſa figure par des forces étrangeres,) le rapport des poids des colonnes *ZN*, *Zn* ſur l'axe, ſe trouvera le même que dans la Sphére : par le *Corol.* 3. *Prop.* 91 *Lib.* I. *Princ. Neut.*

Suppoſons maintenant que la Sphére commence à avoir du mouvement autour de ſon axe *ZD*, & que ce mouvement aille toujours en augmentant, juſqu'à un dégré de viteſſe donnée, à meſure que le fluide monte dans les tuyaux *NM*, *nm*, l'axe *ZD* reſtant le même, & le fluide qui monte dans les tuyaux, étant fourni par des Siphons aux Pôles *Z*, *D*.

On demande ſuivant quelle eſpece d'ordonnées le fluide doit s'élever.

1°. Il eſt clair que cette eſpéce doit être unique.

2°. L'équilibre du fluide ſe conſervera pendant qu'il montera, & l'accélération du mouvement venant à ceſſer, il gardera la figure qu'il a pris, ſuppoſé que les accroiſſemens des puiſſances qui ſoutiennent les colonnes, (leſquels ſont en effet les accroiſſemens des poids des colonnes mêmes) ayent été partout comme les poids.

3°. Cette condition ne ſe trouvera que dans le Sphéroïde Géométrique. On a vû que les poids des colonnes *ZN*, ſont en raiſon de *NMq*, (de même auſſi les forces centrifuges correſpondantes) ou de *NRq*, *ZRTD*, étant une Ellipſe. Leurs accroiſſemens ſeront donc comme le rectangle ſous *NR* & ſa fluxion, c'eſt-à-dire comme *NRq*, ou *NMq*, ou enfin comme les poids des colonnes en repos.

Puiſque donc la Figure d'une Sphé-

roïde Géométrique fournit les puiſſances néceſſaires pour entretenir l'équilibre, c'eſt l'eſpece unique que l'on cherchoit.

COROLLAIRES.

Il ſuit de ce que l'on vient de démontrer.

1°. Que ſi les forces *centrifuges* venoient à être changées en *centripétes*; ou que ſi les colonnes dans la Sphére ſouffroient une compreſſion vers l'axe, proportionnelle aux quarrés de leurs hauteurs; la Figure de la Terre deviendroit celle d'un Sphéroïde *allongé*. Par conſéquent, quiconque voudra donner à la Terre cette Figure, doit trouver dans la Nature une force nouvelle qui ſoit, & *plus puiſſante* que la force centrifuge, & *qui agiſſe dans un ſens contraire*.

2°. Le Sphéroïde étant devenu ſo-

lide & ſans mouvement, & la force de cohéſion ayant pris la place de la force centrifuge, les poids des colonnes ſeront dans le même rapport qu'auparavant, c'eſt-à-dire comme les *quarrés de leurs hauteurs.* Et les attractions des *particules* vers l'axe, ſeront partout comme *leurs diſtances. Propoſitions* deſquelles il auroit fallu partir pour démontrer *ſynthétiquement* la Figure du fluide en queſtion, mais dont on a pû ſe paſſer en ſuivant la méthode précédente. En effet, cette Figure n'eſt qu'une ſuite de l'*Analogie qui ſe conſerve entre les preſſions des colonnes d'un fluide, lequel circule dans un état permanent, & celles d'une Sphére de même matiere.*

3°. La *Gravitation* d'une particule vers un point quelconque de la ſurface du fluide, ſera perpendiculaire au plan qui touche la ſurface dans ce point, autrement la particule ſeroit

pouſſée

poussée suivant une direction latérale, (ce qui est contre l'hypothése d'un état permanent). Et le Sphéroïde étant en repos (comme au Corol. 2.) l'on pourra facilement déterminer la direction de la gravitation, pourvû que l'on sache quel doit être le rapport entre la force de gravité & la force centrifuge, pour que le fluide conserve la figure donnée.

Par les Corollaires 1. & 2. on détermine les forces actuelles de gravité sur la surface d'un Sphéroïde homogéne donné, dont la figure se conserve par un mouvement autour de l'axe. *Vice versâ*, étant donné le rapport des forces actuelles de gravité à deux points quelconques de la surface, ou ce qui revient au même, étant donnée la courbure de l'Ellipse génératrice à ces deux points, on trouvera l'*espece* du Sphéroïde. En voici la Formule : $m = \sqrt{: \frac{c^2 l^2 - C^2 L^2}{S^2 L^2 - s^2 l^2}}$; dans la-

quelle le rayon du Cercle de l'Equateur étant 1, *S*, *s*; *C*, *c*; les *Sinus* & *Cosinus* de latitude des lieux d'Observation. *L*, *l*; les longueurs des Pendules Isocrones, ou bien les racines cubiques du nombre de toises qui répond à une petite différence de latitude donnée, *m* sera le demi-axe du Sphéroïde. La Démonstration de cette Formule, pour l'un & l'autre cas est facile, pourvû que l'on mette pour une ordonnée à l'axe, sa valeur exprimée en sinus de latitude.

Mais la *Gravité actuelle* n'étant que l'excès de la force accélératrice d'*attraction* au-dessus de la force *centrifuge*, pour bien démêler ces forces, il nous faut une *mesure commune déterminée*, (telle que la force attractive d'une Sphére de la même matiére homogéne) à laquelle la *force* accélératrice d'un Sphéroïde en repos puisse être comparée.

Cette comparaiſon cependant n'eſt pas des plus faciles. Depuis M. le Chevalier *Newton*, elle a fait l'objet des recherches de pluſieurs Géométres, & entr'autres de M. *Mac-Laurin*, dans ſon *Traité ſur le Flux & Reflux de la Mer*, qui a concouru pour le Prix propoſé en 1740. par l'Académie Royale des Sciences. Ce ſçavant Géométre, qui paroît avoir très approfondi cette Queſtion, y donne quelques *Théorémes* d'une élégance admirable, & l'on eſpére trouver encore dans ſon grand Ouvrage *ſur la Méthode des Fluxions*, qui doit bientôt paroître, *des Eclairciſſemens ſur ce qui regarde la Figure de la Terre.*

Comme mon intention n'eſt nullement de m'approprier les travaux d'autrui, qu'il me ſoit permis de tracer au Lecteur la route que j'ai tenuë dans la même recherche.

Pour éviter les répétitions, on aura

la bonté de ſe ſouvenir que l'attraction de la matiére eſt ſuppoſée partout ici en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & que la matiére elle-même eſt ſuppoſée homogéne ; je me ſers ſans ſcrupule du terme d'*Attraction*, parce que je me flate qu'on ne m'accuſera pas d'entendre par ce mot, quelque qualité occulte, ou un effet ſans cauſe.

LEMME I.

Soit *AB* (*Fig.* 7.) le Diamétre d'une Surface circulaire de matiére dont le centre eſt *C*, & *P* un point quelconque dans la ligne *PC* perpendiculaire à cette Surface ; l'attraction du point *P* vers la Surface, ſelon *PC*, ſera comme $\frac{PA - PC}{PA}$, ou bien comme $1 - \frac{PC}{PA}$.. *Newt. Princip. Lib.* I. *Propoſit.* XC. *Corol.* 1.

LEMME II.

Soit AaC, une Lame de matiére, dont la largeur Cc eſt très-petite, & P, un point pris dans une ligne PC perpendiculaire à AC au point C; l'attraction du point P vers cette lame, dans la direction PC, ſera comme $\frac{AC}{PC \times AP}$.

Si l'on met pour DC partie quelconque de la Lame, la lettre x & $\dot{x}$ pour ſa fluxion De, & que la diſtance PC ſoit repreſentée par a; l'attraction de la particule De dans la direction PD ſera comme $\frac{De}{PDq}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{\dot{x}}{a^2 + x^2}$; & la partie de l'attraction qui agit ſelon PC ſera comme $\frac{PC}{PD} \times \frac{\dot{x}}{a^2 + x^2} = \frac{a\dot{x}}{\overline{a^2 + x^2}|^{\frac{3}{2}}}$. Donc l'intégrale, ou la ſomme des attractions de toute la Lame dans la direction

PC, (quand $x = AC$) eſt $\frac{x}{a \times \sqrt{a^2 + x^2}}$ $= \frac{AC}{PC \times PA}$.

Tout Solide peut être conſidéré comme la ſomme d'une infinité de Plans très-minces, & ces plans comme une infinité de Lames telles que l'on les ſuppoſe dans le Lemme; ainſi pour déterminer l'attraction, ou la force accélératrice qu'exerce un Solide donné ſur un point ou particule quelconque, il ne faudroit que ce Lemme ſeul, ſans l'embarras qu'on trouve à intégrer les fluxions qui réſultent des différentes ſubſtitutions. Mais dans le cas du Sphéroïde Géométrique, il y a moyen d'éviter cette difficulté, ainſi que nous le verrons dans la ſuite, & il ne faut pour cela que le Lemme ſuivant.

LEMME III.

Que l'on faſſe tourner le triangle

PCA ſur l'axe *PL* paralelle à *CA*, de maniére que la Surface *AacC* (qu'il faut ſuppoſer pour lors dans le Plan du triangle) décrive l'Elément d'une Surface cylindrique, ou bien celui d'un coin dont la baſe ſoit *CA* & la pointe *P*, & dont l'épaiſſeur ſoit très-petite par rapport à toute épaiſſeur donnée, mais très-grande par rapport à celle de la Surface *AacC*. Alors l'attraction de cet Elément ſera dans le même rapport que celle de la petite ſurface *AacC*, la diſtance *PC* étant conſtante; mais ſi *PC* eſt variable, l'attraction ſera augmentée ou diminuée dans le rapport de *PC* (ou *a*); & par conſéquent deviendra comme $\frac{AC}{PA}$, ou $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

PROBLÉME.

Trouver le rapport de l'attraction au Pôle ou à l'Equateur d'un Sphéroïde Géométrique, à l'attraction de la Sphére inscrite ou circonscrite.

PREMIER CAS.

Pour trouver l'attraction au Pôle; soit AB (*Figures* 8. & 9.) le Diamétre d'un Cercle du Sphéroïde, paralelle à l'Equateur, qui ait C pour centre, & P son Pôle. En mettant $v = PC$, $x = AC$, $d = PZ$ pour le Diamétre de la Sphére inscrite ou circonscrite, & $m : 1$ pour le rapport du grand Diamétre de l'Ellipse génératrice au petit : la Fluxion de l'attraction au Pôle sera $\dot{v} \times \overline{1 - \frac{v}{\sqrt{v^2 + x^2}}}$, (par le Lemme I.) = (faisant évanoüir x par l'Equation de l'Ellipse, & divisant par $\sqrt{v}$) =

$$= \begin{cases} \dot{v} \times \overline{1 - \sqrt{\frac{v}{m^2 d - \overline{m^2 - 1} \times v}}} & \text{Pour le Sphéroïde applati.} \\ \dot{v} \times \overline{1 - m \times \sqrt{\frac{v}{d + \overline{m^2 - 1} \times v}}} & \text{Pour le Sphéroïde allongé.} \end{cases}$$

SECOND CAS.

Pour trouver l'attraction à l'Equateur.

Si d'un point *A* de la Surface d'un Sphéroïde *ZAhPd* (*Figures* 8. *&* 9.) dont l'axe est *hd*, on méne la ligne *AC* paralelle à *hd*, qui rencontre le Plan de l'Equateur en *C*, & la Surface de la Sphére circonscrite ou inscrite en *a*; il est évident que *CA* sera à *Ca* dans un rapport constant; or puisque toutes les sections planes d'une Sphére sont des Cercles, en faisant tourner un Plan autour de la Tangente *LP* (paralelle à *hd*) comme autour d'un axe, on partagera la Sphére & le Sphéroïde en un nombre infini de *Coins* circulaires & elliptiques semblables,

dont les forces attractives vers le point P, selon le Plan de l'Equateur seront dans un rapport constant, ce qui est aisé à prouver; aussi les inclinaisons du Plan étant les mêmes, les parties des attractions qui agissent selon ZP, diamétre de l'Equateur, seront dans le même rapport.

Il suffit donc pour trouver le rapport des attractions totales, de chercher celui de l'attraction d'un Coin elliptique très-petit, à l'attraction du Coin circulaire qui est renfermé par les mêmes plans, celui, par exemple, de l'attraction des Coins dont l'axe est PZ.

Or l'on voit (*Lemme* III.) que la Fluxion de cette force est $\dot{v} \times \frac{x}{\sqrt{v^2 + x^2}}$

$$= \begin{cases} \dot{v} \times \sqrt{\frac{d - v}{d + \overline{m^2 - 1} \times v}} & \text{Pour le } Sphéroïde \text{ applati.} \\ \dot{v} \times m \times \sqrt{\frac{d - v}{m^2 d - \overline{m^2 - 1} \times v}} & \text{Pour le } Sphéroïde \text{ allongé.} \end{cases}$$

Dans l'un & l'autre cas en mettant

$m = 1$, on aura la Fluxion de l'attraction d'une Sphére dont le Diamétre est d purement intégrable.

Enfin les intégrales des Fluxions pour les Sphéroïdes (trouvées par la la Formule LXXXIII. *Cotes. Harmon, Mensur*, pag. 236.) nous donneront les rapports suivans.

1. *Pour le Sphéroïde applati.*

$$\left.\begin{matrix}\text{Pôle} \\ \text{Eq.}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}P \\ Q\end{matrix}\left\{\begin{matrix} 1 + \dfrac{1}{m^2 - 1} - \dfrac{m^2}{\overline{m^2-1}|^{\frac{3}{2}}} \times A : \text{à } \frac{1}{3} \\ \dfrac{m^2}{\overline{m^2-1}|^{\frac{3}{2}}} \times A - \dfrac{1}{m^2 - 1} : \text{à } \frac{2}{3} \end{matrix}\right\}$$

2. *Pour le Sphéroïde allongé.*

$$\left.\begin{matrix}\text{Pôle} \\ \text{Eq.}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}P \\ Q\end{matrix}\left\{\begin{matrix} 1 - \dfrac{m^2}{m^2 - 1} + \dfrac{m^2}{\overline{m^2-1}|^{\frac{3}{2}}} \times l : \text{à } \frac{1}{3} \\ \dfrac{m^2}{m^2 - 1} - \dfrac{m^2}{\overline{m^2-1}|^{\frac{3}{2}}} \times l : \text{à } \frac{2}{3} \end{matrix}\right\}$$

Dans lesquels A est l'arc d'un Cercle (au Rayon 1.) dont la Tangente

eſt $\sqrt{m^2 - 1}$; *l* le logarithme *hiperbolique* de $\frac{S}{V}$; *S* étant le Sinus de l'arc, dont le Coſinus eſt $\frac{1}{m} \sqrt{m^2 - 1}$, & *V* le Sinus verſe du même arc. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

A l'inſpection ſeule, on voit avec quelle facilité les rapports *Q* ſe changent en *P*, & *vice verſâ* on en tire les régles ſuivantes.

1. Si le rapport de l'attraction au *Pôle* d'un Sphéroïde à l'attraction de la Sphére inſcrite, ou circonſcrite, eſt celui de *N*, l'attraction à l'*Equateur* ſera $\frac{1}{2} \times \overline{3 - N}$; & ſi le rapport de l'attraction à l'*Equateur*, à l'attraction de la Sphére circonſcrite ou inſcrite eſt *n*, celui de l'attraction de la Sphére inſcrite ou circonſcrite ſera $3 - 2n$.

2. Si le rapport *N* eſt donné, l'at-

traction du Sphéroïde (applati ou alongé) au Pôle, se trouve à son attraction à l'Equateur, comme $2N\,\frac{\cdot}{\times\cdot}\Big\}\,m$ à $3 - N$. Et si le rapport n est donné, l'attraction du Sphéroïde à l'Equateur est à son attraction au Pôle, comme $n\,\frac{\times\cdot}{\cdot}\Big\}\,m$ à $3 - 2n$.

Ainsi mettant $m = 1\frac{1}{100}$, $N\frac{126}{125}$, l'attraction au Pôle sera à l'attraction à l'Equateur, comme $2 \times \frac{126}{125}$ à $1.01 \times 3 - \frac{126}{125}$, c'est-à-dire, comme $1.002 +$ à 1, ou bien comme $\frac{501}{500}$, rapport que le Chevalier *Newton* avoit trouvé par approximation.

3. Si t est la Tangente de l'arc A, l'on sçait que $A = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 +$ &c. Et que t étant petit, les termes initiaux de la suite approchent assez de la valeur de A. Substituant donc les quatre termes initiaux dans le rapport $1 + \frac{1}{m^2 - 1} - \frac{m^2}{\overline{m^2-1}|^{\frac{3}{2}}}$, A

à $\frac{1}{3}$, ou $\frac{m^2}{m^2-1} - \frac{m^2}{\overline{m^2-1}|^{\frac{3}{2}}} \times A$ à $\frac{1}{3}$, & écrivant pour t sa valeur $\sqrt{m^2-1}$; on aura pour le rapport de l'attraction au Pôle d'un *Sphéroïde* applati à l'attraction de la Sphére inscrite

$$m^2 \times \overline{1 - \tfrac{3}{5} \times \overline{m^2-1} + \tfrac{3}{7} \times \overline{m^2-1}|^2}.$$

Formule qui suffit dans le cas du Sphéroïde de la Terre, & dont on peut se servir pour éviter l'extraction de la racine, & le calcul d'un arc circulaire par les Tables.

La même substitution de t, qui est la distance du Foyer de l'Ellipse génératrice au centre, donne en multipliant par t^3,

$$P = 3\,m^2 \times \overline{t - A} \text{ à } t^3$$
$$P = m^2 \times \overline{A - t} \text{ à } \tfrac{2}{3}\,t^3$$

Qui sont les deux Théorémes de M. *Mac-Laurin* pour le Sphéroïde applati *.

* Fin de l'Addition.

M. *Newton* (dans la ſeconde Edition de ſon Ouvrage) a ſuppoſé la Terre un peu plus denſe vers le centre. Mais cette ſupoſition ne changera que très-peu la figure d'un Sphéroïde Géométrique. En effet dès que l'on concevra cette eſpece de noyau de matiere ſurabondante qui produit l'excès de denſité comme une maſſe diſtinƈte, de même figure que la Terre, & agiſſant ſur la maſſe homogéne extérieure en raiſon double réciproque des diſtances, il eſt évident que les couches de la matiere homogéne ſous l'Equateur, ſeront à proportion plus légéres que s'il n'y avoit point de noyau au centre, & par conſéquent qu'elles s'éleveront davantage; mais cette élévation ſous l'Equateur, ſuite de la denſité au centre, eſt renfermée dans des bornes étroites, & il doit y avoir de l'Equateur aux Pôles, une pente

douce & égale, qui lui foit proportionnée ; ce qui fait que la Figure approchera toujours fort de celle d'un Sphéroïde parfait *.

Mais revenons à la force centrifuge ; elle a un double effet par rapport à la gravitation : 1°. Elle diminue *immédiatement* la pefanteur des Corps, mais plus fous l'Equateur que partout ailleurs ; & à toute latitude donnée en raifon double de fon Cofinus, ou plus rigoureufement encore, comme le rectangle fous l'*Ordonnée* & le *Cofinus* de cette latitude. 2°. Elle diminue la pefanteur *médiatement*, parce qu'elle donne à la Terre la figure d'un Sphéroïde.

* Dans la derniere Edition des *Princ. de Newton*, en fe réglant fur les Obfervations de M. *Richer*, & rejettant le refte de l'allongement du Pendule fur le Chaud, on a pû fe paffer de cette hypothèfe. Mais les meilleures Obfervations depuis ce tems-là, femblent demander qu'on la rappelle.

On

On voit bien préſentement que la force qui fait vibrer les pendules eſt la même que celle qui attire les Corps vers la Terre, & par conſéquent que ſi la gravitation augmentoit aſſez pour que le poids qu'un homme eſt en état de lever de terre, devint tout d'un coup trop lourd pour lui, quoiqu'il employât la même force, il faudroit que le Pendule fit en ce cas des vibrations plus fréquentes ; ce feroit le contraire, ſi la force de gravité venoit à diminuer. Il faut prendre garde auſſi que la durée des vibrations d'un Pendule dépend encore de ſa longueur.

Lors donc que M. *Richer* étant à *Cayenne* à 5° de l'Equateur, trouva que la Pendule qu'il avoit apportée de *France*, retardoit au point que pour avoir le tems vrai, il falloit racourcir la verge du Pendule d' $\frac{1}{8}$ de pouce, c'étoit une preuve certaine que dans cette Iſle la gravitation étoit moindre qu'en

France. Et toutes les fois que l'on a répété depuis avec soin l'expérience de la longueur du Pendule, on en a toûjours conclu que la *Gravitation décroît des Pôles vers l'Equateur.*

Il est vrai que la chaleur du Climat contribua à faire allonger la verge du Pendule de M. *Richer*, mais ce ne pût pas être d'un huitiéme de pouce sur une longueur d'un peu plus de trois pieds, à en juger par les expériences que nous connoissons de l'extension des Métaux par la chaleur ; d'ailleurs les Académiciens François qui ont été au Cercle Pôlaire, ont eû l'attention, quand ils ont fait leurs expériences sur la Pesanteur, de mettre à *Pello* par les 66°. 48'. de latitude, l'air au même dégré de chaleur qu'ils avoient eûe à *Paris*, & se sont servis dans les mêmes endroits du même Thermométre.

Si donc les différentes longueurs du Pendule à différentes latitudes, font

connoître les diminutions de la Gravité, & que de la ſomme des diminutions l'on retranche celles qui ſont l'effet immédiat de la force centrifuge, on aura dans le ſurplus les diminutions duës à la Figure Sphéroïdique de la Terre, en la ſuppoſant partout de même denſité : ainſi la queſtion ſe réduit à ſçavoir quelle eſpéce de Sphéroïde, ſuivant la Loi générale d'attraction, produira une diminution donnée de peſanteur à un point donné de la ſurface ?

La longueur du Pendule à ſecondes étant au Pôle, par exemple de 441.38 lignes ou douziémes du pouce de *Paris* *, & à l'Equateur de 439.468 avec une différence de 1.912 lignes, la diminution de Gravité ſera exprimée par la fraction $\frac{1912}{441380}$, de laquelle retranchant $\frac{1}{289}$, effet immédiat de la force centrifuge, il reſte $\frac{1}{1148}$. Mais M. le Chevalier *Newton* (*Prop.* 19. *Liv.* III.)

* *Voyez* la Table de M. le Chevalier *Newton*.

a prouvé par le calcul, que si le demi-axe d'un Sphéroïde en repos, est au demi-diamétre de son Equateur, comme 100. à 101, la diminution de Gravité à l'Equateur sera $\frac{1}{501}$. Je dis donc, comme la diminution $\frac{1}{501}$ est à la différence $\frac{1}{100}$; de même est $\frac{1}{1148}$ à $\frac{1}{229}$; c'est-à-dire le demi-diamétre de l'Equateur est au demi-axe, comme 230. à 229.

On voit dans la même Proposition que la Fraction $\frac{1}{289}$ exprime aussi la partie du poids de la colonne *CA*, (*Fig*. 5.) qui est soûtenuë par les forces centrifuges; & d'ailleurs que dans le Sphéroïde du dernier paragraphe, dont le grand & le petit diamétre sont comme 100. à 101. l'excès du poids du fluide dans la colonne *CA* sur le poids de *CP*, sera $\frac{4}{505}$ de *CA*. Si donc l'excès du poids $\frac{4}{505}$ donne la différence des demi-diamétres $\frac{1}{100}$, que donnera l'excès du poids $\frac{1}{289}$?

même réponſe qu'auparavant, $\frac{1}{229}$. Ainſi dans une Sphéroïde dont le demi-diamétre de l'Equateur, eſt au demi-axe, comme 230. à 229. l'excès du poids de la colonne *CA*, ſera égal au poids que les forces centrifuges peuvent ſoûtenir, & par conſéquent les fluides dans les canaux *CA*, *CP*, reſteront en équilibre.

C'eſt ſur ce rapport de 230. à 229. que M. le Chevalier *Newton* a calculé ſa Table des longueurs du Pendule à différentes latitudes. Mais les différences des longueurs calculées ſe trouvant moins conſidérables que les longueurs obſervées, il a ſuppoſé, comme nous l'avons déja dit, un noyau, une maſſe de matiére plus denſe au centre, & augmentant la différence des demi-diamétres dans le rapport dont la différence de la longueur du Pendule trouvée par obſervation, excédoit la différence donnée

par le calcul, il a fait la Terre plus élevée à l'Equateur, de 31 $\frac{7}{12}$ milles, au lieu de 17 $\frac{1}{6}$.

On peut auſſi prendre, au lieu de $\frac{1}{289}$, une fraction (f) telle qu'elle puiſſe donner le même produit dans les deux Analogies, c'eſt-à-dire, on peut ſuppoſer que les effets de la maſſe centrale, ſçavoir la diminution de la force accélératrice, & l'élévation de l'Equateur qui en eſt la ſuite, différent très-peu de ce qu'ils ſeroient, s'ils euſſent été produits par une rotation diurne plus rapide.

Par conſéquent la longueur du Pendule à ſecondes étant au Pôle, ſuivant la Table de M. de *Maupertuis* * de 441 $\frac{1}{2}$ lignes, & à l'Equateur de 439.33. avec une différence de 2.17. la diminution totale de la Gravité ſera $\frac{217}{44150}$; & ſi l'on en retranche $\frac{1}{289}$, & qu'on procéde par la premiere Ana-

* *La Figure de la Terre déterminée*, pag. 181.

logie, le rapport que l'on cherche, ſera $\frac{138}{137}$ qui eſt trop grand, de même que $\frac{230}{229}$ eſt trop petit. Mais ſi au lieu de $\frac{1}{289}$ on ſe ſert de la fraction $\frac{1}{254 \cdot 7}$, les deux Analogies donneront le rapport du grand demi-diamétre au petit, comme 203 à 202.

Mais cette Table de M. de *Maupertuis* eſt elle-même calculée d'après une hypothèſe qui avoit déja été abandonnée, ſçavoir la denſité uniforme de la Terre, & ne différe en effet de celle de M. *Newton*, qu'en ce qu'une plus grande différence de longueur obſervée entre *Paris* & *Pello*, ſur laquelle eſt fondé le calcul, change proportionnellement toute la Table. Nous pouvons par conſéquent ſuppoſer la fraction $\frac{217}{44150}$ trop petite, & choiſir $\frac{30}{4415}$, comme moins éloignée de la vraye détermination; car les meilleures Obſervations faites du tems du Chevalier *Newton*, ne donnoient ſur

la longueur du Pendule de l'*Equateur* à *Paris*, qu'environ deux lignes de différence; & de *Paris* à *Pello* par les expériences ſcrupuleuſes de M. de *Maupertuis*, il y a $\frac{6}{10}$ de ligne, & ſuppoſant pour la diſtance de *Pello* au Pôle $\frac{4}{10}$ de plus, la ſomme eſt de trois lignes; auquel cas la fraction (*f*) ſera portée à $\frac{1}{184\frac{1}{4}}$, & le rapport des demi-diamétres à $\frac{147}{146}$.

Au reſte quoique cette régle fondée ſur une ſuppoſition raiſonnable puiſſe ſervir juſqu'à ce qu'on en ait trouvé une meilleure, il ne faut pas croire qu'elle ſoit ſuſceptible de démonſtration, ni peut-être ſuffiſament exacte. Des expériences ſur les Pendules, on eſt en droit ſeulement de conclure que l'Equateur eſt plus élevé, mais on ne peut pas déterminer avec préciſion la quantité de cette élévation, puiſque l'état intérieur de la Terre (qui nous eſt inconnu) doit

faire partie de cette préciſion : il eſt bien vrai qu'en admettant que la Figure de la Terre dépend de l'équilibre des forces centrifuge & attractive, & attribuant la diminution de la force accélératrice ſous l'Equateur (déduction faite des effets de la force centrifuge & de l'attraction du Sphéroïde homogéne) à l'attraction du noyau de matiére plus denſe, il ne s'en ſuivra pas néceſſairement que l'Equateur ſoit plus élevé que ſi la Terre étoit ſimplement homogéne ; ſon élévation peut être moindre, égale, ou plus grande, ſuivant l'état de la maſſe centrale. Nous ferons voir dans la ſuite, combien il eſt probable que ce dernier cas eſt celui de la nature.

Suppoſons préſentement la Terre un fluide homogéne en mouvement ; ſuppoſons le rapport de ſon grand à ſon petit diamétre, comme 230 à 229, & ſuppoſons en outre qu'une partie

du fluide vienne à ſe changer en une Sphére ſolide concentrique, qui ait la même force attractive que celle que l'on donne au noyau central ; il eſt certain qu'en ce cas le diamétre de l'Equateur diminuera ; car dans la colonne de fluide qui eſt dans le plan de l'Equateur, à une diſtance du centre égale à l'étenduë du demi-axe, la nouvelle attraction eſt la même que dans le tuyau pôlaire ; & par conſéquent l'attraction du reſte de la colonne de l'Equateur, augmentera le rapport du poids total de cette colonne à celui de la colonne de l'axe ; tandis qu'en même-tems la force accélératrice à l'Equateur ſera plus affoiblie.

A la Sphére concentrique, ſubſtituons maintenant un Sphéroïde ſolide, ſemblable à la Terre ; & faiſons communiquer les deux tuyaux entre eux le long de ſa Surface. Si l'on ſuppoſe le rapport du demi-axe au demi-

diamétre de l'Equateur, comme celui de 1. à z, les hauteurs des deux colonnes du fluide environnant, étant dans le même rapport, les poids de deux petites portions du fluide, proportionnelles aux colonnes entieres, & placées toutes les deux dans ces colonnes, poids, dis-je, produits par cette nouvelle attraction, seront en raison directe des masses des petites portions de fluide, & en raison inverse des quarrés de leurs distances au centre. Et comme la somme de ces poids est aussi dans le même rapport, le poids de la colonne de l'axe sera au poids de la colonne de l'Equateur, comme 1 à z, & z^2 à 1, c'est-à-dire comme z à 1; il sera par conséquent prépondérant, & dèslors il élevera l'Equateur dans un rapport plus grand que celui de 230. à 229.

Enfin si l'on veut que le petit Sphéroïde tienne un certain milieu entre

la Sphére & le Sphéroïde de Terre homogéne, ſon attraction ne changera rien au rapport des diamétres de la Terre.

Il s'agit de donner des preuves de ce qui vient d'être avancé. Que la ligne droite *RG* (*Fig.* 5.) Tangente du Méridien à l'Equateur dans le point *E*, repréſente la longueur du Pendule, ou ce qui eſt la même choſe, la force accélératrice de la Gravitation à l'Equateur; que *ER* portion de cette ligne exprime l'attraction de la matiére ſurabondante; que l'on mene au centre la ligne *GC*, & que du point *R*, l'on décrive la Courbe *RFZ*, ayant ſes ordonnées *RE*, *FV*, en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances au centre *CE*, *CV*. L'aire *ERFV*, interceptée par l'ordonnée *ER* à la Surface de la Terre, & par toute autre ordonnée *FV*, paralelle à celle-là (c'eſt-à-dire, l'aire $RE \times EV \times \frac{CE}{CV}$) ſera proportion-

nelle à cette partie du poids de la colonne *EV* qui dépend de l'attraction de la matiére ſurabondante : & le Trapeze *EVTG*, coupé par l'ordonnée *FV* prolongée, exprimera la partie du poids de la même colonne qui eſt l'effet de l'attraction de la Terre uniformément denſe. En appliquant aux points correſpondans du Pôle la même conſtruction en petites Lettres *r*, *e*, *g*, &c. & faiſant l'aire *RGTF* égale à *rgtf*, on arrivera à une Equation qui donnera le rapport du grand & du petit diamétre, conformément aux ſuppoſitions que l'on a été obligé d'employer.

Si donc *CV*, eſt à *Cv*, comme z à 1, c'eſt-à-dire, ſi la matiére ſurabondante a la même forme que la Terre, l'Equation produite par la comparaiſon des aires *RGTF*, *rgtf*, ſera $aqb \times z^3 - \overline{\overline{a+b} \times q + rb} \times z^2 + \overline{\overline{1-a} \times q + r \times \overline{c+b}} \times z + q = 0$. Dans

cette Equation le demi-axe de la Terre, de même que la force accélératrice au Pôle, étant 1, z, est le demi-diamétre de l'Equateur (& e étant la différence des demi-axes & de la matiere surabondante) $q = e - \frac{1}{2}e^2$, $a = RG$, exprime la force accélératrice à l'Equateur, $c = \overline{1 - a} + \frac{1}{289}$, $b = \frac{100}{501}$, $r = \frac{e}{1-e} - q$.

On peut se passer, si l'on veut, de tant d'exactitude, en se servant de l'Equation Quadratique $aqb \times z^2 - \overline{\overline{2a+b} \times q + rb} \times z + 2q + r \times \overline{c+b} = 0$.

De même il n'y a qu'à supposer que la masse surabondante est une Sphére dont le rayon est au demi-diamétre de l'Equateur, comme t à 1, & écrire $a \times \overline{1 - t^2} = k$, on aura pour l'Equation $\overline{\overline{c-1} \times t^2 + bk} \times z^3 + \overline{\overline{c-1} \times t^2 + 2b - k} \times z^2 + \overline{\overline{t^2 - 3} \times \overline{c+b} + 1 - k} \times z + 1 = 0$.

Ou pour trois ou quatre Décimales la Quadratique $\overline{2-c\times t^2-bk}\times z^2+2\times\overline{\overline{k-b}-ct^2}\times z+\overline{3-t^2}\times\overline{c+b}-2=0$.

Et dans tous les cas l'attraction de la masse surabondante au Pôle de la Terre, sera à l'attraction totale, comme $\frac{c-b\times\overline{z-1}}{\frac{z^2-1}{z^2}-b\times\overline{z-1}}$ à 1, c'est-à-dire, elle sera à l'attraction de la Terre uniformément dense, comme $c-b\times\overline{z-1}$, à $\frac{z^2-1}{z^2}-c$.

D'où il suit que la densité de cette masse sera connuë dans tout cas donné; car elle sera à la densité de la Terre homogéne, presque en raison directe des forces attractives au Pôle, & en raison inverse des cubes des demi-diamétres. Voyez le *Coroll.* 1. *Prop.* 74. *Lib.* I. *Princip.*

On voit par ces Equations, que si

la fraction $\frac{25}{4415}$ exprime la diminution totale de la pesanteur à l'Equateur, dans la supposition que le Pendule à secondes est plus court d'environ $2\frac{1}{2}$ lignes à l'Equateur qu'au Pôle, & que la masse plus dense est une Sphére dont le rayon est le $\frac{1}{4}$ du demi-diamétre de l'Equateur, la différence du grand demi-diamétre au petit demi-diamétre de la Terre, ne sera que $\frac{1}{400}$ de ce dernier. Si le rayon de la masse plus dense étoit le $\frac{1}{10}$, la différence approcheroit très-fort de $\frac{1}{343}$. Enfin quand la masse plus dense seroit réduite à un point, le demi-diamétre de l'Equateur n'excéderoit jamais le demi-axe de plus de $\frac{1}{333}$.

Au contraire en laissant la fraction $\frac{25}{4415}$, & supposant la masse plus dense semblable à la Terre, avec ses deux diamétres dans le rapport de 1 à 4, l'élévation de l'Equateur sera entre $\frac{1}{129}$, & $\frac{1}{130}$ du demi-axe, & elle parviendra

(cette

(cette élévation) entre $\frac{1}{108}$, & $\frac{1}{109}$, si le demi-axe de la masse plus dense est $\frac{1}{10}$. Dès que le Sphéroïde intérieur deviendra incomparablement petit, c'est-à-dire que e sera plus grand que toute autre fraction, dans la premiere Equation r sera incomparablement grand, ce qui réduira l'Equation à $z = \frac{c+b}{b} = 1 + \frac{1}{99}$, au contraire si e est moindre qu'aucune fraction, $q = e$, & r s'évanoüissant, si l'on divise par q, l'Equation se trouvera $abz^3 - \overline{a+b} \times z^2 + \overline{1-a} \times z + 1 = 0$; ce qui rendra z presque égal à $1 + \frac{1}{175}$, de même si l'on fait la diminution totale égale à $\frac{30}{4415}$, les limites de z seront $1 + \frac{1}{60}$, & $1 + \frac{1}{267}$ *.

* Dans tout ce Calcul, la force centrifuge est $= \frac{1}{289}$, & $b = \frac{100}{501}$, mais après que ces Fractions ont servi pour l'approximation, on peut, si l'exactitude des Expériences le demande, les calculer de nouveau, & répéter les Opérations; ou plutôt on devroit y employer le Corollaire de la page 22. N°. 2.

On voit par tous ces exemples que la masse sphérique peut racourcir le demi-diamétre de l'Equateur, & l'on sent en général quel doit être l'effet d'un Sphéroïde quelconque; car (tout d'ailleurs égal) plus le Sphéroïde est applati, ou moins il a d'étendue, plus la colonne de l'Equateur est élevée, & *vice versâ*. Par conséquent (comme je l'avançois tout-à-l'heure) à moins que les conditions de la masse ne soient données, il n'est pas possible, en conséquence d'aucune régle connuë pour le présent de déduire avec certitude des expériences faites avec le Pendule, la nature du Sphéroïde de la Terre.

Au reste, je suis bien éloigné de penser que les expériences du Pendule ne soient d'aucun usage dans la question présente, elles me paroissent au contraire extrémément utiles pour écarter des difficultés, qui sans elles seroient capables d'embarasser; mon

intention a été ſimplement de faire voir qu'il ne faut pas ſe hâter de conclure d'après ces ſeules expériences, & j'ai voulu indiquer tout ce qu'il peut y avoir à déſirer avant que de toucher à l'objet principal : indépendamment du nombre ſuffiſant de bonnes Obſervations de la longueur du Pendule, faites à toutes les latitudes où il eſt poſſible d'aborder, il eſt néceſſaire d'étudier les loix d'attraction telles qu'elles ſont à un point quelconque de la Surface, non-ſeulement de la Terre homogéne, mais de la Terre renfermant un noyau central de matiere plus denſe, ou graduellement plus denſe de la ſurface au centre. C'eſt en comparant ces expériences avec la Théorie, & entr'elles, que l'on peut eſpérer de voir la Figure de la Terre mieux déterminée, & même de découvrir en partie ſon état intérieur.

Surtout, ſi l'on veut s'aider d'Ob-

ſervations, tirées de quelque autre ſource, & l'on n'en manque pas. Car dès que l'on peut déduire des conditions de la maſſe centrale & de la diminution de la Gravité, l'élévation de l'Equateur, ainſi que l'on vient de le voir, s'il y a moyen, ſoit par la méthode des Académiciens François dont je parlerai plus bas, ſoit par les Obſervations des Eclipſes de Lune, de déterminer cette élévation avec une exactitude raiſonnable, on aura la grandeur de la maſſe ſphéroïdique ſemblable, en faiſant e la quantité inconnuë dans l'Equation $aqbz^3$, &c. ce qui abaiſſera l'Equation à la Quadratique $e^2 - 3e + \frac{s}{\frac{1}{2} \times s - t} = 0$, où s & t ſont les coefficiens de q & r, avant la tranſformation de l'Equation. Ainſi lorſque l'on aura trouvé de quelque maniere que ce ſoit que z eſt $= 1.01$, & $a = 1 - \frac{30}{4415}$, $1 - e$, ou le demi-axe du Sphéroïde concentrique

excéde 297. Il eſt probable qu'il n'y a pas une différence bien grande, en cas même qu'il y en ait; & ſi la différence étoit conſidérable, on s'en appercevroit aſſez facilement par les vibrations du Pendule à des Latitudes éloignées.

Quoiqu'il paroiſſe par tout ce qui vient d'être démontré, que l'affoibliſſement de la force accélératrice à l'Equateur, n'eſt point incompatible avec le racourciſſement du demi-diamétre de l'Equateur, dans le cas où l'on ſuppoſe le noyau central d'une Figure parfaitement ſphérique ou peu différente de la Sphére, cependant on trouve dans cette Démonſtration une preuve phyſique probable que ce n'eſt point là le cas de la Nature. Car dans un des exemples où la matiere plus denſe eſt une Sphére dont le rayon a $\frac{1}{4}$ du demi-diamétre de l'Equateur, ſi l'on

calcule la force accélératrice au Pôle, on la trouvera d'environ $\frac{38}{100}$ du total, & par conſéquent la denſité entiére de la Sphére concentrique eſt à celle de la Matiére environnante, comme 42 à 1, rapports qui ne paroîtront pas à ce que je crois, bien naturels, au lieu que dans l'hypothèſe de la Figure Sphéroïdique ſemblable à la Terre, & du rapport des deux diamétres, comme 1 à 4, la force accélératrice au Pôle n'eſt que de $\frac{48}{1000}$, & la denſité totale du Sphéroïde, eſt à celle de la Matiére environnante, un peu plus que comme 1307 à 1000. En calculant d'après d'autres ſuppoſitions de grandeur, on retrouve précisément la même choſe, c'eſt pourquoi l'on eſt bien fondé à penſer que la forme du noyau central approche bien plus de la Figure d'un Sphéroïde ſemblable à la Terre, que de celle d'une Sphére.

C'eſt ainſi du moins que M. le Chevalier *Newton** Auteur de cette hypothèſe paroît l'entendre, car en parlant de la maſſe centrale, il ſe ſert de ces mots *paulo denſior* ; & (à quoi le Docteur *Gregory* ne paroît pas avoir pris garde, *Prop.* 52. *Lib.* III.) il meſûre l'attraction, non par la diſtance du centre, comme il auroit pû

* *Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod Terra ex uniformi materiâ conſtat. Nam ſi materia ad Centrum paulo denſior ſit quàm ad ſuperficiem, differentia Pendulorum & Graduum Meridiani paulo majores erunt quàm pro Tabulâ præcedente, propterea quod ſi materia ad Centrum redundans, quâ denſitas ibi major redditur, ſubducatur, & ſeorſim ſpectetur, Gravitas in Terram reliquam uniformiter denſam erit reciprocè ut diſtantia ponderis à centro, in materiam veró redundantem reciprocè eſt ut quadratum diſtantiæ* à materiâ illâ *quam proximè. Gravitas igitur ſub Æquatore minor eſt in materiam illam redundantem quam pro computo ſuperiore ; & propterea Terra ibi, propter defectum Gravitatis, paulo altius aſcendet, & exceſſus longitudinum Pendulorum & Graduum ad Polos, paulo majores erunt quam in precedentibus definitum eſt.* Prop. 20. Lib. III. Edit. 2.

faire, mais de la *Matiére elle-même*, dans le dessein d'insinuer qu'il croyoit que cette matiere plus dense, est à peu près de la Figure de la Terre.

En cas que l'on demandât comment un tel Sphéroïde s'est-il donc formé, puisqu'il n'a pû être redevable de sa Figure à l'effet des forces centrifuges ? Je répons que si le fluide environnant eut été parfaitement homogéne, il seroit impossible de résoudre la question; mais dans un Cahos, ce fluide peut avoir été aussi hétérogéne que l'on voudra l'imaginer, & en prouvant que la masse centrale a pû prendre la Figure d'un Sphéroïde, on trouvera une assez bonne raison pour que toute autre Figure ne lui eut pas également convenu.

Le premier effet de la révolution d'un fluide hétérogéne, doit avoir été de mettre les Particules en équilibre. Par conséquent les parties les plus

denſes auront dû ſe ranger vers l'Equateur, & s'y ſeront trouvées de la même Gravité que les parties plus voiſines du Pôle, parce que la force centrifuge aura détruit une partie de leur peſanteur. De l'excès de denſité dans le fluide près de l'Equateur, il s'enſuit néceſſairement une attraction plus puiſſante à la maſſe centrale, qui par l'hypothèſe eſt d'abord ſphérique; l'adhéſion néceſſaire pour former un Corps ſolide, a donc dû ſe faire, & plus facilement, & plus abondamment, & quand une fois l'Equateur de la maſſe centrale aura commencé à être ſenſiblement plus élevé, la cauſe de la denſité du fluide en cet endroit aura dû encore augmenter un peu plus, puiſque la peſanteur d'une particule diminue non-ſeulement par la force centrifuge, mais encore par ſa diſtance au centre du Sphéroïde (*Cor.* 2. *Prop.* 91. *Lib.* I. *Princip.*)

Par conſéquent l'on peut ſuppoſer que l'accroiſſement du Sphéroïde aura toujours continué de même, juſqu'à ce que toute la matiere du fluide la plus denſe, ſe ſoit attachée à la maſſe centrale, c'eſt-à-dire, juſqu'à ce que la contiguité de quelque partie, moins diſpoſée à perdre ſon état de fluidité, ait dérangé & interrompu l'adhéſion des parties.

C'eſt ainſi du moins que l'on peut imaginer la formation d'une maſſe centrale plus denſe que la Terre environnante, & ſon adhérence peut être bien forte avec elle : ſi l'on n'admet point de maſſe centrale, comment eſt-il poſſible non-ſeulement de réſoudre le Problême du Sphéroïde de la Terre, mais encore d'expliquer un autre Phénoméne d'une bien plus grande conſéquence, la Variation de l'Aiguille Aimantée ? peut-on s'empêcher de

croire que la maſſe centrale n'eſt que le noyau central, que ſuppoſe le Docteur *Halley* dans ſon explication ſi ingénieuſe de cette Variation (*Tranſ. Phil. N°* 195.)? Et ſi c'eſt le même noyau, & qu'en déterminant ſa grandeur, on puiſſe eſpérer de mieux connoître la loi de la Variation, ces recherches ſeroient-elles de pures imaginations, comme certains Lecteurs pourroient peut-être ſe l'imaginer?

III.

Malgré l'accord général qui ſe trouvoit entre la Théorie & l'expérience pour donner à la Terre la Figure d'un Sphéroïde applati, la prévention de quelques Mathématiciens Etrangers a mis dans la néceſſité d'approfondir de nouveau cette queſtion, & de l'examiner par un côté différent.

M. *Caſſini* en traçant la Méridienne

de *France*, depuis *Dunkerque* jusqu'à *Collioure* en *Rouſſillon*, avoit trouvé que les dégrés du Méridien étoient plus grands vers le Sud, & il en avoit conclu que la Terre étoit un Sphéroïde alongé, plus élevé aux Pôles qu'à l'Equateur, d'environ 95 milles. M. le Chevalier *Newton* répondit, « que si » cette mesure étoit juste, les Corps » devroient être plus legers & le Pen- » dule plus long sous l'Equateur qu'en » *France* d'environ un demi-pouce, & » que le diamétre de l'ombre de la » Terre du Sud au Nord devroit sur- » passer le diamétre de l'Est à l'Oüest » de 2′. 46″. douziéme du diamétre de » la Lune. Suppositions entierement » contraires au fait & à l'observation. Mais ces sortes de représentations ne pouvoient pas avoir grande force contre des personnes qui n'étoient pas d'humeur de se rendre.

La *France* a été le principal Théâtre

de cette diſpute : grand nombre d'Habiles Gens y étoient trop inſtruits des principes de M. le Chevalier *Newton* pour ne pas ſentir tout le poids de ſes raiſons, & ils étoient trop attachés à la vérité pour ſe laiſſer entraîner par l'eſprit de prévention à l'autorité; mais d'autres Phyſiciens emportés peut-être par l'opinion de deux ou trois Mathématiciens d'un autre Païs, & guidés par les Obſervations d'un Aſtronome comme M. *Caſſini*, dont l'exactitude étoit reconnuë, ne ſe rendoient point à toutes les raiſons qu'on leur donnoit, & aux expériences qu'on leur alléguoit. Enfin le Roi, ce grand Monarque qui ſignale ſon Regne par ſon Amour pour les Sciences, & par ſes dépenſes pour les Sçavans, envoya deux Troupes de Mathématiciens, l'une au *Pérou*, & l'autre au fonds du Nord, afin de décider par la meſure actuelle d'un dégré, la Queſ-

tion de la Figure de la Terre; Question assurément qui n'est pas de pure curiosité, & qui est assez importante pour la Navigation, & pour d'autres Arts de pratique.

Afin de mieux entendre le fonds de la dispute, & la façon dont elle a été terminée, il faut se rappeller ce qui a été dit plus haut, touchant la maniere de mesurer un arc du Méridien: on y a dû voir que (*Fig.* 1.) si le demi-diamétre *CA* eut été plus court, l'arc *AB* répondant à une différence donnée dans la hauteur de l'Etoile *S*, auroit diminué proportionnellement, & qu'au contraire cet arc eut augmenté si *CA* avoit été plus grand. Par conséquent l'on peut sans crainte de se tromper considérer un petit arc de l'Ellipse *PA*, *pE*, (*Fig.* 5.) comme partie de la circonférence d'un Cercle; si l'on prend en *A* sommet du grand axe ce petit arc, le de-

mi-diamétre du Cercle ſera le plus petit qu'il eſt poſſible : au contraire il ſera le plus grand ſi le petit arc eſt pris en *P*, & partout ailleurs il aura une grandeur intermédiaire proportionnée à ſa diſtance d'un des points. Donc ſi les dégrés étoient plus grands vers l'Equateur, comme M. *Caſſini* le penſoit d'abord * les demi-diamétres des Cercles de *même Courbure* augmenteroient auſſi, c'eſt-à-dire que l'Equateur ſeroit en *Pp*, & les Pôles en *AE*. Mais M^rs. les Académiciens qui ont été dans la *Laponie* par ordre du Roy de *France*, nous aſſurent du contraire, & ils ont trouvé que l'arc du Méridien Terreſtre au Cercle Pôlaire qui répond à un dégré dans le Ciel, eſt ſenſiblement plus grand qu'un pareil arc en *France*.

On verra dans l'Ouvrage de M. de

* J'ai appris que M. *Caſſini* avoit reconnu depuis peu qu'il s'étoit trompé.

Maupertuis qui étoit à la tête de l'Entreprise, avec quelle précision les Observations du Nord ont été faites ; je ne rapporterai ici que quelques unes des principales circonstances qui doivent faire donner à ces Observations la préférence sur toutes celles de ce genre que nous connoissons jusqu'à présent.

1. Pour la partie Astronomique, ces Messieurs se sont servis d'un Secteur avec lequel une erreur d'une Seconde devenoit sensible, & qui mettoit en état d'observer avec une exactitude assurément incroyable, si l'on ne sçavoit que Monsieur Graham s'étoit appliqué à procurer à cet Instrument tous les avantages & les commodités dont on avoit besoin, & qu'il en avoit lui-même divisé le Limbe.

2. Les Etoiles fixes qu'ils ont observées (δ & α *du Dragon*) étoient si proches de leur Zénith, qu'on ne pouvoit

pouvoit point ſoupçonner d'erreur de la part de la réfraction de la lumiere.

3°. Dans la correction de la différence de la hauteur Méridienne d'une même Étoile, ils ont eu égard, non-ſeulement à la Préceſſion des Équinoxes, mais encore à l'Aberration de la lumiere de l'Étoile, découverte importante, faite depuis peu par M. *Bradley* & très-bien décrite dans *les Tranſact. Philoſ.* N° 406.

4°. En répétant avec l'Étoile α leurs Obſervations, il ne s'eſt trouvé qu'une différence de 2 Secondes ſur l'amplitude donnée par l'Étoile δ.

5°. Quant à la Meſure terreſtre, la Baze qu'ils ont meſurée, s'eſt trouvée ſur la ſurface la plus propre que l'on pût eſpérer pour ce deſſein, puiſque c'étoit ſur la Glace d'une Riviere, qui dans cet endroit formoit une eſpece de Lac.

6°. La Meſure de cette Baze a été

faite avec des Perches parfaitement égales, par deux Compagnies séparées, & chaque Compagnie a trouvé le même nombre de toises & de pieds à quatre pouces près.

7°. M. de *Maupertuis* dans un Discours lû à l'Académie Royale des Sciences avant son départ, avoit fait voir que pour l'Opération dont il étoit chargé, la justesse de la Mesure dépendoit du dégré d'exactitude que donne l'Instrument, comparée au dégré de précision avec lequel on prend les Angles horizontaux; & faisant depuis l'application de ces premieres Réflexions à la Baze du Cercle Polaire, il trouva qu'elle avoit toute l'étendue & la longueur nécessaire.

8°. Pour prendre les Angles entre les Signaux, on s'est servi d'un quart de Cercle de deux pieds de rayon armé d'un Micrométre; on a eu soin d'observer la hauteur ou l'abaissement

des objets qu'on a employés pour les Angles, & fur ces hauteurs a été fondée la réduction des Angles au Plan de l'Horizon. Afin de déterminer la direction de la fuite des Triangles à l'égard de la Méridienne, on a pris le paffage du Soleil fur une Pendule de M. *Graham*, & l'heure du paffage par les Verticaux des deux Signaux; on a employé pour cette derniere Obfervation (*perpendiculaire*) un Inftrument compofé d'une Lunette quarrée & mobile autour d'un Axe horizontal. Cet Inftrument étoit encore de l'invention de M. *Graham*.

9°. Le nombre & la pofition des Signaux avoient toutes les conditions demandées ci-deffus (page 10), ils formoient un long Heptagone au milieu duquel fe trouvoit la Baze & donnoient une belle fuite de Triangles; par le calcul de ces Triangles combinés de différentes façons, on a tou-

jours trouvé l'Arc du Méridien à très-peu de chofe près, de la même longueur. On a fuppofé même le cas fingulier, que dans tous les Triangles, depuis la Baze, on fe fût toujours trompé de 20″ dans deux des Angles & de 40″ dans le troifiéme, & que toutes ces erreurs allaffent toujours dans le même fens, ou tendiffent toujours à diminuer la longueur de l'Arc du Méridien, & le Calcul fait d'après cette étrange fuppofition, il ne s'eft trouvé que $54\frac{1}{2}$ Toifes pour l'erreur qu'elle pouvoit caufer.

Que l'on ajoûte à tout cela l'habileté reconnue, & le zéle infatigable des Savans chargés de l'entreprife; que l'on fe rappelle qu'ils étoient fix; & que l'on fache que chacun écrivoit fur un Journal féparé fes Obfervations, & que quand il s'eft trouvé la plus légére différence, on en a toujours pris le milieu; peut-on avoir, ou plutôt,

peut-on désirer sur ce sujet un travail plus parfait ?

Il résulte des Opérations de ces Académiciens, *que le dégré du Méridien Terrestre qui coupe le Cercle Polaire, est de 57437.9 Toises, plus grand, (déduction faite de la Réfraction, de la Précession des Equinoxes & de l'Aberration) que le dégré mesuré par M.* Picard *entre* Paris *&* Amiens *de 512.2 Toises:* & c'est sur ce résultat qu'ont été calculées les Tables Loxodromiques que que je publie.

Avant que de finir, je ne dois pas oublier de dire que M. de *Maupertuis* a vérifié avec le Secteur de M. *Graham* le dégré de M. *Picard*, & qu'il l'a trouvé trop court de quelques secondes; mais cette différence m'a paru trop légére pour me faire changer mes Tables, d'autant que si quelqu'un avoit envie de les redonner sous une autre forme pour l'usage ordinaire, il

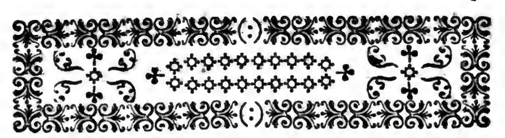
lui feroit aifé avec les régles que j'ai établies, ou de les corriger fur de nouvelles Obfervations meilleures, ou d'en calculer d'autres.

Poft fcriptum.

La fuite donnée par M. de *Maupertuis* pour déterminer le rapport du demi-Diamétre de l'Équateur, au demi-Axe, eft

$$E \times \overline{1 + \tfrac{3}{2} \times \overline{m^2 - 1} \times S^2 + \tfrac{3}{8} \times \overline{m^2 - 1}\big|^2 \times S^4 + \&c.} =$$
$$F \times \overline{1 + \tfrac{3}{2}\ \overline{m^2 - 1} \times s^2 + \tfrac{3}{8} \times \overline{m^2 - 1}\big|^2 - s^4 + \&c.}$$

Dans laquelle E & F font les longueurs des deux dégrés mefurés; S & s les fuites des Latitudes refpectivement au Rayon 1; m le demi-Axe, & 1 le Rayon de l'Équateur; en mettant D pour $1 - m$ il a les formules $D =$ $= \frac{E - F}{3 \times \overline{ES^2 - Fs^2}}$ ou $D = \frac{E - F}{3E \times \overline{S^2 - s^2}}$.



NOUVELLES TABLES LOXODROMIQUES, *ou* APPLICATION DE LA THEORIE DE LA VÉRITABLE FIGURE DE LA TERRE, *A LA CONSTRUCTION* DES CARTES MARINES RÉDUITES.

LE principal dessein des Académiciens François qui ont mesuré le dégré au Cercle Polaire, ayant été dans cette grande & pénible entre-

priſe, de perfectionner la Navigation, j'ai jugé qu'il ne feroit point inutile d'examiner juſqu'à quel point la Queſtion de la Figure de la Terre, & les Obſervations de ces Mrs. influoient ſur cet Art, & ſi les Tables & les Cartes en uſage avoient réellement beſoin d'une correction ſenſible.

Les Cartes plates ne peuvent point ſervir, comme l'on ſçait, pour des Voyages de Long-cours, parce qu'elles ne ſont pas la repréſentation d'un Globe. Avec les Cartes conſtruites, ſuivant la méthode des Cartes Géographiques, on auroit les moindres diſtances ſur la Sphére, mais on ne connoîtroit point les Angles du Rumb de Vent, & il feroit difficile de déterminer aucune des Routes d'un Vaiſſeau ſuivant les pointes du Compas, à moins que de ſuppoſer que ce Vaiſſeau fît voile ſur un Méridien, ou ſur l'Équateur même.

Il eſt vrai, à la rigueur que dès qu'un Vaiſſeau a une fois gagné la Latitude du lieu vers lequel il fait voile, & qu'il ne quitte point le même paralelle, l'on peut trouver avec la plus grande certitude, un Port dont la ſituation, ſoit à l'Eſt, ſoit à l'Oueſt, eſt connue; mais cette méthode eſt également embaraſſante & indirecte. La vraïe pratique à laquelle on puiſſe aſſujettir & les Cartes & les Tables, eſt donc celle des Lignes de Rumb qui coupe chaque Méridien ſous le même Angle.

Comme les Cartes Marines doivent cependant être réduites ſous la forme la plus ſimple qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire que la projection ne s'en doit faire que par des Lignes droites, il faut, ſi l'on ſuppoſe les dégrés de l'Équateur & de ſes paralelles tous égaux les uns aux autres, que ceux du Méridien quoiqu'égaux auſſi entre eux,

ſoient exprimés par des Lignes continuellement croiſſantes de l'Équateur au Pôle.

On apprendra dans les *Tranſactions Philoſophiques* N°. 219, l'Hiſtoire de cette invention utile, on y verra de quelle maniere cette invention s'eſt perfectionnée, & l'on y trouvera la méthode ſi ſimple & ſi commode pour conſtruire les *Tables des Parties Méridionnales de Mercator*, (ou plutôt de M. *Wright*) que le Dr. *Halley* a ſçû déduire de la proprieté de la Logarithmique ſpirale, en prouvant que les Méridiens des Cartes Marines ſont des Echelles de Tangentes Logarithmiques des demi-complemens des Latitudes. M. *Cotes* a démontré la même choſe par ſa Méthode des Rapports (*Harmon. Menſur.* p. 20. 21.)

Enfin M. George *Campbel*, dans un Manuſcrit que j'ai vû il y a pluſieurs années, abandonne la Spirale Loga-

rithmique, & n'employe que le Lemme suivant.

LEMME.

Que QL (Fig. 1.), ($=c$) *soit un Arc de Cercle, qui ait LP pour complément; que LS* ($=s$) *en soit le Cosinus, & que LT, PT, Tangentes en L & en P, se rencontrent en T,* (t) *sera la Tangente de* $\frac{1}{2}$ *LP.* Alors je dis que la Fluxion *de l'Arc QL sera à la Fluxion de la Tangente t, comme le Cosinus LS est à la même Tangente.*

DÉMONSTRATION.

Supposé que par le mouvement de *LS* en *ls*, l'Arc *QL* ait crû de la quantité *Ll*, il n'y aura qu'à mener au point *l* la Tangente *lt*, qui coupe *PT*, *LT* en *t* & en *x*, & *Tt* sera le décrement de la Tangente *PT*, lequel répond à l'incrément de l'Arc *Ll*. Du point *x* comme centre, on

fera passer par T & par l, les Arcs Tv, lq, qui coupent lt, LT en v & q, on tirera le demi-Diamétre KL égal par supposition à x, & alors on aura $xl : ql :: xT : Tv = \frac{ql \times xT}{xl}$. Mais si l'on veut que ls rebrousse chemin & retourne en LS, le Triangle Ttv sera enfin rectiligne, $Lx + xq$ l, c'est-à-dire, $2\,lx$ sera $= Ll$ ou $\dot{c}$; $lq = \frac{1}{2}\dot{c}^2$ (suivant le *Corol.* I. du *Lemme* XI. des *Principes Mathématiques*) & $xT = t$. Il viendra donc $Tv = \frac{\frac{1}{2}\dot{c}^2 \times t}{\frac{1}{2}\dot{c}} = \dot{c} \times t$. Mais par les Triangles alors semblables LKS, Ttv, $LK : LS$ (ou $1 : s$) $:: Tt : Tv = s \times Tt$, & par conséquent $s \times -\dot{t} = t \times \dot{c}$ ou $\dot{c} : -\dot{t} :: s : t$. *C. Q. D.*

PROBLÉME I.

Etant donné ABC (Fig. 2.) *l'Angle de la route d'un Vaisseau sur une Sphére,*

avec la différence de Latitude Aβ, trouver CK la différence de Longitude.

SOLUTION.

Suppofant *PKZ* le Méridien, *AK* la Latitude d'où le Vaiſſeau a mis à la voile, *βBL* le paralelle où il eſt arrivé *Br*, *br*, *Cc* les Fluxions de ce paralelle, de la Latitude actuelle du Vaiſſeau & de la Longitude, & le demi-Diamétre de la Sphére 1. Au lieu du Coſinus de Latitude *Kβ*, c'eſt-à-dire, au lieu du Sinus de l'Arc *LP* mettez *s* & pour la Tangente de $\frac{1}{2}$ *LP* ſervez-vous de *t*. Alors *Cc* ſera à *Br*, comme le demi-Diamétre de la Sphére eſt au demi-Diamétre du paralelle *βBL*, c'eſt-à-dire, $\frac{Cc}{Br} = \frac{1}{s}$ & $Br : rb :: n : m$ (dans un Rapport donné par Hypothèſe). Par conſéquent $Cc = \frac{n}{m} \times \frac{rb}{s}$; or par le Lemme $\frac{rb}{s} = -\frac{\dot{t}}{t}$,

d'où $Cc = \frac{n}{m} \times - \frac{\dot{t}}{t}$. Mais si l'on employe T pour Tangente de la moitié du Complément de la Latitude AK de laquelle le Vaisseau est parti, il est évident qu'étant $CK = o$ la Fluente de $\frac{n}{m} \times - \frac{\dot{t}}{t}$ doit s'évanouir aussi au lieu d'être $= \frac{m}{n} \times Fl. \frac{\dot{T}}{T}$. Et dès qu'elle aura disparu, CF sera $= \frac{n}{m} \times F\frac{\dot{T}}{T} - F\frac{\dot{t}}{t} =$ la différence des Logarihmes hyperboliques de T & t multipliés par $\frac{n}{m}$.

COROLLAIRE I.

Si A est en α (sur l'Equateur), T = Rayon & la différence de Longitude, αC sera $\frac{n}{m} \times \overline{lR - l.t.}$

COROLLAIRE II.

En dévelopant le Triangle Curviligne αBC sur un Plan (*Fig.* 3.) où l'É-

quateur & ses dégrés sont représentés par une ligne droite *CD* divisée en parties égales & où les perpendiculaires à l'Équateur *CP*, *QP*, &c. marqueront les Méridiens *CBP*, *KAP*, &c. pour lors comme le Sinus de αBC, est au Cosinus; de même $n : m :: \alpha C : CB = \frac{m}{n} \times \alpha C$, mais αC a été trouvé $= \frac{m}{n} \times \overline{l.R - l.t.}$ par conséquent $CB = \overline{lR - l.t.}$ Ainsi il est évident qu'on aura avec précision les dégrés de Latitude sur le Méridien, *en imaginant un Vaisseau parti de l'Equateur sous une Angle de 45°. & en transportant sur la Ligne Méridienne les Longitudes qui répondent aux différentes Latitudes par lesquelles il passe;* car $l.R—l.t$ ($= CB$) est la Longitude, quand $n = m$.

M. *Campbell* donne dans le même Ouvrage un très-grand nombre de Théorémes curieux, & déduit de

de cette Solution plusieurs Régles entierement nouvelles ; mais c'est là tout ce que j'en ai pû tirer & ce qui m'est nécessaire pour le présent.

PROBLÉME II.

La Figure seconde représentant un Spheroïde engendré par la révolution d'une Ellipse autour de son petit Axe *PZ*, dont le demi-Diamétre de l'Équateur *KE* est 1, & la moitié de l'Axe $KP = \alpha$, *diviser la Ligne Méridienne du Vaisseau sur ce Sphéroïde*, ou ce qui est la même chose, *trouver la Longitude* αC *qui répond à une Latitude quelconque* $K\beta$ *dans une route de* 45°.

SOLUTION.

Que *LS* ordonnée à l'Axe & tirée du paralelle où le Vaisseau arrive, soit *z* & l'Abscisse *PS*, *y*. Tirez la Tangente *LM* & faites *rb*, ou *Ll* =

$= \dot{c}$, $Cc = \dot{v}$; l'Equation de cette Ellipse étant $z^2 = \frac{2ay - y^2}{a^2}$ & $y = a - a \times \sqrt{1 - z^2}$, il est aisé de voir que la Soutangente $SM = \frac{az^2}{\sqrt{1 - z^2}}$. Mais $\dot{c} : -\dot{z} :: \sqrt{SM^2 + z^2} : z :: \frac{\sqrt{a^2 - 1 \times z^4 + z^2}}{\sqrt{1 - z^2}} : z :: \frac{\sqrt{1 + \overline{a^2 - 1} \times z^2}}{\sqrt{1 - z^2}} : 1 ::$ (faisant $q = 1 - a^2$) $:: \sqrt{1 - qz^2} : \sqrt{1 - z^2}$, ou $\dot{c} = \overline{1 - qz^2}|^{\frac{1}{2}} \times \overline{1 - z^2}|^{-\frac{1}{2}} \times -\dot{z}$. & raisonnant de même que dans le *Problême* I. $\dot{v} = \frac{\dot{c}}{z}$. Par conséquent si l'on substitue à $\dot{c}$ sa valeur qui vient d'être trouvée, qu'on en forme une suite & qu'on se serve des Fluentes, employant de même l pour un Logarithme hiperbolique, on aura v ($= aC$) $=$

$$\left.\begin{array}{l}
A - lz - \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{32}z^4 - \frac{5}{96}z^6 - \frac{35}{1024}z^8 - \frac{63}{2560}z^{10} - \frac{231}{12288}z^{12} - \\
\quad + \frac{1}{4}q + \frac{1}{16}q + \frac{3}{96}q + \frac{5}{256}q + \frac{7}{512}q + \frac{21}{2048}q + \\
\qquad + \frac{1}{32}q^2 + \frac{1}{96}q^2 + \frac{3}{512}q^2 + \frac{1}{256}q^2 + \frac{35}{12288}q^2 + \\
\qquad\quad + \frac{1}{96}q^3 + \frac{1}{256}q^3 + \frac{3}{1280}q^3 + \frac{5}{3072}q^3 + \\
\qquad\qquad + \frac{5}{1024}q^4 + \frac{1}{512}q^4 + \frac{5}{4096}q^4 + \\
\qquad\qquad\quad + \frac{7}{2560}q^5 + \frac{7}{6144}q^5 + \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{7}{4096}q^6 +
\end{array}\right\} \&c$$

A eſt ici pour la valeur de la Serie $-l.z - \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}q} \times z^2$, &c. quand z devient égal au demi-diamétre de l'Equateur, & il n'y a que les Signes changés.

COROLLAIRE I.

Si $q = o$, c'eſt-à-dire, ſi la Figure eſt une Sphére, la ſuite n'ayant plus les Termes où entrent les coefficiens, q donnera les diviſions communes de la ligne Méridienne, & ſera (*Cor.* 2. *Prob.* 1.) $= l.R - l.t.$

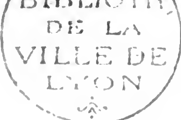
En changeant le Signe de q, on aura les mêmes divisions pour un Sphéroïde allongé.

Si $q = 1$, $v = l$, R $- l.z$ est l'Equation d'une Spirale Logarithmique décrite sur le plan de l'Equateur.

Et en général on peut employer la même méthode pour toute Figure engendrée par la révolution d'une Courbe autour d'un Axe.

COROLLAIRE II.

Ayant rejetté lz, si au lieu de tous les Termes suivans l'on écrit dans la même ligne g, qu'à la place des Termes restans de la suite affectés de q & de ses puissances l'on mette h, & qu'à ces mêmes termes on substitue lR, G & H, quand $z = 1$; alors on aura $v = lR + G - H - lz - g + h$: mais (par le *Corol.* I.) si t = la Tangente de la moitié de l'Arc circulaire



dont z eſt le Sinus, on trouvera $l.R + G - l.z - g = l.R - l.t$ ou $l.z + g - l.t - G = o$ qui étant ajoûté à l'Equation précédente, donne $v = l.R - l.t - \overline{H - h}$.

Sur ces Corollaires on peut calculer par les regles ſuivantes un *Table des parties Méridionales* pour le *Sphéroïde.*

I.

D'après les Obſervations qui ont été faites, trouver l'eſpece du Sphéroïde, c'eſt-à-dire, la valeur de *q* qui ſera ſuivant les meſures de M. de *Maupertuis* preſque .022.

I I.

Pour une Latitude quelconque *LMS* (*Fig.* 4.) dont le Sinus 1. eſt *S*, trouver l'ordonnée $LS = z$ qui ſera toujours $\frac{\sqrt{1 - S^2}}{1 - qS^2}$.

III.

Appliquer dans le Cercle circonſcrit $Q\lambda\pi E$, $\lambda\sigma t$ égale & paralelle à LST; trouver par le *Probl.* I. c'eſt-à-dire, par la régle du Dr. *Halley*, les Parties méridionales pour la Latitude $Q\lambda$ ou pour l'Angle $\lambda m\sigma$ (lequel ſera ſur le Sphéroïde applati toujours moindre que LMS) & de ces Parties ſouſtraire $H-h$ réduit à la même dénomination de minutes ou de dixiémes &c. de minutes.

IV.

Il eſt toujours néceſſaire d'indiquer la maniere de calculer $H-h$, car il ſeroit impoſſible de ſe ſervir de la façon ordinaire de ſommer les coefficiens qui ſont l'un ſur l'autre, & de les multiplier par les puiſſances reſpectives de z, les coefficiens numé-

riques de q, q^2, &c. étant trop long-tems à se rapprocher. D'ailleurs il faudroit quand z approche de l'unité, employer une autre suite.

Je considére donc une partie quelconque de $H - h$ affectée de la même puissance que q comme l'Aire d'une Courbe, & il arrive dans le cas présent que toutes ces Aires sont assignables en termes finis, & que q étant fort petit, deux de ces termes, c'est-à-dire, ceux qui appartiennent à q & q^2 sont presque toujours une approximation suffisante. Pour trouver, par exemple la partie de $H - h$ qui est affectée de q^3, j'écris les Fractions $- \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{1}$ dont les Numérateurs sont les Exposans de $\overline{a + b}|\ 3 - 1$ & les Dénominateurs, les Nombres impairs dans un ordre renversé; les signes étant alternativement $\pm$, $\mp$ suivant que la puissance de q est paire ou impaire. Je joins à ces coefficiens

$x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{1}{2}}$ (ayant fait $x = 1 - z^2$) quand les Numérateurs des puissances sont les Dénominateurs des coefficiens, & que le Dénominateur constant est 2 ; & j'ai $-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$ qui étant multiplié par $-\frac{1}{16}q^3$. Le coefficient de ce terme de $\overline{1 - qz^2}|^{\frac{1}{2}}$ (lequel produisoit la partie démandée) donne $-\frac{1}{16}q^3 \times \overline{-\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{3}x - 1} \times x^{\frac{1}{2}}$ pour l'aire que l'on cherche. De même l'Aire de q est $-\frac{1}{2}q \times \overline{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 0} = \frac{1}{2}qx^{\frac{1}{2}}$; celle de q^2 est $-\frac{1}{8}q^2 \times \overline{\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{1}x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{8}q^2 \times \overline{\frac{1}{3}x - 1} \times x^{\frac{1}{2}}$; celle de $q^5 - \frac{7}{256}q^5 \times \overline{-\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{7}x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{4}{3}x - 1} \times x^{\frac{1}{2}}$, &c.

Remarque. Quand z est petit on aimera peut-être mieux calculer h séparément, & alors il faut prendre garde que H est égal à la suite $\frac{1}{1.2}q + \frac{1}{3.4}q^2 + \frac{1}{5.6}q^3 + \frac{1}{7.8}q^4 - \frac{1}{\overline{2n-1} \times 2n} \times q^n$

= . 011040692. Ou si l'on vouloit dans le même cas calculer les parties Méridionales tout d'un coup d'après la suite $G\ (= \frac{1}{4} + \frac{3}{32} + \frac{5}{96} +$ &c.) = . 693147.

Lorsque je travaillois à ces Calculs,* il y a trois ans, je me contentai de la Solution précédente, parce que *q* étant petit, elle m'avoit fourni un moyen assez commode de calculer; mais je sentois qu'il s'en falloit bien qu'elle eût cette élegance que l'on estime tant dans la solution d'un Problême.

Aussi-tôt que mon essai parut, M. *Mac-Laurin*, eut la bonté de m'avertir de ce défaut, & il me communiqua une Régle qui vaut infiniment mieux que la mienne; en voici la substance, car je n'ai point conservé sa Lettre.

* Addition que M. *Murdoch* a prié le Traducteur d'inserer en cet endroit.

Soient s le Sinus d'un Arc de latitude donné, P les parties Méridionales qui répondent à cet Arc (tirées de la Table de *Wright*) & p de semblables parties pour l'Arc dont le Sinus eſt $\sqrt{q} \times s$: les parties Méridionales pour la latitude donnée ſur un Sphéroïde applati, ſeront $P - \sqrt{q} \times p$.

M. *Mac-Laurin* m'ajoûta que la différence entre les parties Méridionales d'une Sphére, & celle d'un Sphéroïde allongé ſe réduiſoit à un certain Arc circulaire : & il ne donna aucune Démonſtration de l'une & l'autre Propoſition.

La Démonſtration en eſt très-facile. Si par exemple dans l'expreſſion dont je me ſuis ſervi, ($\dot{v} = \frac{\sqrt{s - qz^2}}{\sqrt{s - z^2}} \times \frac{\dot{z}}{z}$) l'on écrit pour z ſa valeur $\frac{\sqrt{1 - s^2}}{\sqrt{1 - qs^2}}$, on aura $\dot{v} = \frac{\dot{s}}{1 - s^2} - \frac{q\dot{s}}{1 - qs}$ ou bien

(en mettant $x = \sqrt{q} \times s$) $\dot{v} = \frac{\dot{s}}{1 - s^2}$ $- \sqrt{q} \times \frac{\dot{x}}{1 - x^2}$; ce qui produit la formule de M. *Mac-Laurin*. Car puisque l'intégrale du membre où q n'entre pas, se trouve dans la Table de *Wright*; on y trouvera de même si l'on veut par la régle connue du Docteur *Halley*, celle du membre négatif semblable, il faut seulement avant que de le retrancher le multiplier par la quantité constante $\sqrt{q}$.

En cas que l'on ignorât la régle du Docteur *Halley*, cette substitution fourniroit une régle toute semblable, qui pourroit même servir à démontrer Géométriquement celle de M. *Halley*. Car l'Intégrale de $\frac{\dot{s}}{1 - s^2}$ est la moitié du Logarithme hiperbolique de $\frac{1 + s}{1 - s}$, ou le Logarithme hiperbolique de $\frac{\sqrt{1 - s^2}}{1 - s}$. Par conséquent si du Logarith-

me tabulaire de $\sqrt{1-s^2}$ (Sinus du complément de latitude) on retranche celui de $1-s$ (Sinus verſe du même arc) le reſtant multiplié par 7915.7044679 ſera les parties Méridionales qu'on cherche. Or le Sinus d'un arc étant au Sinus verſe, comme le rayon eſt à la Tangente de la moitié de cet arc, ſi à $l.\sqrt{1-s^2}-l.\overline{1-s}$ on ſubſtitue $l.R-lt$, la régle que l'on vient de donner ſe changera en celle du Docteur *Halley*.

Dans le cas du Sphéroïde allongé on a $\dot{v}=\frac{\dot{s}}{1-s^2}+\sqrt{q}\times\frac{\dot{x}}{1+x^2}$; l'intégrale de $\frac{\dot{x}}{1+x^2}$ eſt l'arc du rayon 1 dont la Tangente eſt x (ou $\sqrt{q}\times s$), il faut ajoûter aux parties Méridionales de la Sphére le produit de cet arc par $\sqrt{q}$, & ce produit donnera ces parties du Sphéroïde allongé, pour la latitude au Sinus s.

J'aurois trouvé les mêmes Solutions, en cherchant l'intégrale de $\frac{\sqrt{1+qz^2}}{\sqrt{1-z^2}} \times -\frac{\dot{z}}{z}$, dans les Tables de Messieurs *Cotes* & *Smith* (*Harmon. Mens. p.* 236.) mais je n'eus pas la commodité de le faire d'abord, & dans la suite je n'y pensai point.

PROBLÉME III.

Construction de la troisiéme Table pour les longueurs des Arcs des Méridiens sur le Sphéroïde.

Ecrivant *Q* pour *QP* (*Fig.* 4.) Quart du Méridien Elliptique, & supposant *LS* ($=z$) demi-diamétre d'un Parallele de latitude, il est visible par la solution du *Probléme* II. que l'Arc

$$
\left.
\begin{array}{r}
QL = Q - z - \frac{1}{6}z^3 - \frac{3}{40}z^5 - \frac{5}{112}z^7 - \frac{35}{1152}z^9 - \\
+\frac{1}{6}q + \frac{1}{20}q + \frac{3}{112}q + \frac{5}{288}q + \\
+\frac{1}{40}q^2 + \frac{3}{112}q^2 + \frac{3}{576}q^2 + \\
+\frac{1}{112}q^3 + \frac{1}{288}q^3 + \\
+\frac{1}{1152}q^4 +
\end{array}
\right\} \&c.
$$

Pour les mêmes raiſons qui ont été déduites dans la Solution précédente ; voici de quelle maniere il faudra ſommer cette ſuite.

I.

Faiſant diſparoître Q, la premiere ligne repréſentera l'arc de Cercle dont le Sinus eſt z au Rayon 1, & cet arc s'appellera A.

I I.

Pour le Coſinus du même arc il n'y aura qu'à mettre y & la ſeconde ligne, (c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}q \times F : z^2 \times \overline{1 - z^2} - \frac{1}{2}z$) ſera $\frac{1}{2}q \times \overline{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}zy}$ ($= \frac{1}{2}q \times$B.)

III.

La troisiéme ligne $\frac{1}{8} q^2 \times \overline{\frac{3}{4} B - \frac{1}{4} z^3 y}$ $(= \frac{1}{8} q^2 \times C.)$

Et la quatriéme est $\frac{1}{16} q^3 \times \overline{\frac{5}{6} C - \frac{1}{6} z^5 y}$, &c. tout cela s'entend & s'explique facilement par le quatriéme Théorême de la *Méthode des Quadratures* données par M. de *Moivre* dans les *Transf. Phil.* N°. 278. Ainsi les arcs *QL* peuvent être calculés avec toute la facilité imaginable en se souvenant simplement que les parties exprimées par *z* & *y* doivent être réduites à la même dénomination que *A*, ce qui se fait si *A* est exprimé en minutes, en les multipliant par 3437. 44675.

I V.

On trouve tout d'abord par cette méthode *Q*, c'est-à-dire, tout le quart de Cercle elliptique *QP*, car *A*

eſt pour lors le quart de Cercle & les produits de z, y s'évanouiſſent, par conſéquent Q=

$$A - \overline{\tfrac{1}{2}q \times \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{8}q^2 \times \tfrac{3}{4}B + \tfrac{1}{16}q^3 \times \tfrac{5}{6}C + \&c.} =$$

$$A \times \overline{1 - \tfrac{1}{2}q \times \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}q^2 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{16}q^3 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{5}{6} + \&c}$$

V.

Les mêmes expreſſions ſerviront toujours quand on calculera QL indépendamment de Q, comme il faut le faire lorſque QL eſt petit, avec cette attention ſeulement. 1°. Que z & y changeant de place, la troiſiéme ligne eſt alors $\tfrac{1}{8}q^2 \times \overline{\tfrac{3}{4}B - \tfrac{1}{4}y^3 z}$, & ainſi du reſte. 2°. Que la ſomme des parties affectées de q ne doit point être ſouſtraite de A, mais qu'il faut l'y ajouter. 3°. Que cette derniere ſomme doit diminuer ſuivant le rapport du grand axe au petit.

PREMIER SCHOLIE.

Si $q = 1$, l'arc QP devient le demi-diamétre QK, & l'Equation du N°. IV. eſt alors

$$Q = A \times \overline{1 - \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{16} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{5}{6} - \&c.}$$

$$\text{ou } Q : A :: \overline{1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1.3}{4.4}\alpha + \tfrac{3.5}{6.6}\beta + \tfrac{5.7}{8.8}\gamma + \&c.} : 1.$$

Mais la ſuite $\frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.4}\alpha + \frac{3.5}{6.6}\beta + \&c.$ ſommée par le Scholie de la onziéme Propoſition de la *Méthode différentielle de M. Stirling*, eſt $= .3633803$, & $1 - .3633803$ (c'eſt-à-dire 6366197) $: 1 :: 1 : 1.570796 :: Q : A$; c'eſt-à-dire, comme le demi-diamétre d'un Cercle eſt au quart de ſa circonférence.

SECOND SCHOLIE.

J'ai ſuppoſé en calculant ces Tables q (c'eſt-à-dire la différence des quarrés des demi-Axes) égal à .022, ce qui approche extrêmement de la

vérité

vérité & se trouve conforme aux Opérations faites avec la plus grande exactitude sur le Terrein, par les Académiciens qui ont été au Cercle Polaire*; il seroit fort à souhaiter qu'il y eût encore une autre mesure de la valeur du dégré (surtout près de l'Equateur,) de la précision de celle de M. de *Maupertuis*, & à laquelle celle de M. de *Maupertuis* pût être comparée, q pour lors seroit déterminé avec bien plus de précision. Dans ce cas même, la Régle de M. de *Maupertuis* ** seroit suffisament exacte; car les deux petites erreurs que sa méthode entraîne, se découvriroient d'elles-mêmes, l'une que le milieu de l'Arc mesuré du dégré, ne se connoît que par la

* *La Figure de la Terre déterminée par les Observations de M. de* Maupertuis, &c. *pag.* 125, 126. Lib. 3. Prop. 18, 19, 20. Princip. *Newton.* 2. édit.

** *Ibid. pag.* 129, 130.

longueur du dégré entier, l'autre que ce dégré, eſt un Arc de Cercle. Il faudroit alors approcher de q par la ſuite de M. de *Maupertuis* (l'on pourroit même, ſi l'on vouloit, ajoûter ſon autre terme) & dans le Sphéroïde ainſi déterminé on calculeroit (comme pour la conſtruction de la Table troiſiéme) la longueur du total des Arcs meſurés, ayant ſoin de marquer les différences entre ces Arcs calculés & les Arcs meſurés. Après avoir répété la même Opération avec un autre q un peu plus approchant de la véritable grandeur, il ne ſera point difficile de déduire de ces différences par la ſimple Régle de poſition un q qui donne de la même longueur les Arcs calculés & les Arcs meſurés.

En voilà aſſez pour la conſtruction, paſſons maintenant à l'uſage des Tables.

USAGE DES TABLES.

I.

Si un Vaiſſeau ne quitte point dans ſa route le même Méridien, toutes les queſtions qui ont rapport à ce cas ſe peuvent réſoudre à la ſimple inſpection de la Table troiſiéme, ou tout au plus par ſouſtraction, & il faut ſeulement remarquer.

1°. Qu'entre deux Arcs pris ſur la Sphére & ſur le Sphéroïde depuis l'Équateur juſqu'au même dégré de latitude, la plus grande différence ſe trouve vers 55°. parce qu'à cette hauteur le rayon de la courbure eſt égal au demi-diamétre de l'Équateur; cette différence décroit enſuite & devient au Pôle un peu moindre que 30'.

2°. Que pendant toute la route du Vaiſſeau cette différence va toujours en décroiſſant depuis l'Équateur, pour

le premier dégré elle eſt $\frac{12}{587}$; au 55°. elle ſe trouve de $\frac{9}{651}$, & il n'y a plus que $\frac{298}{53702}$ au Pôle.

3°. Que quand les points extrêmes ſont à égale diſtance du terme de la plus grande différence, la route ſur le Sphéroïde eſt la même que ſur la Sphére, allant par exemple de 45°. à 65°. Si un des extrêmes eſt plus près du Pôle, la route eſt allongée, & au contraire, elle eſt racourcie s'il eſt plus voiſin de l'Équateur.

La troiſiéme Table doit auſſi ſervir à faire la réduction des lignes de Rumb ſur la Carte, au Chemin fait par le Vaiſſeau dans ſa route.

I I.

Par rapport aux routes tant à l'Eſt qu'à l'Oueſt, les minutes pour la différence de longitude à la diſtance parcourue ſont dans le rapport du rayon au demi-diamétre du parallele, (Ta-

ble premiere), ou ſi la diſtance eſt donnée, la diſtance eſt à la différence de longitude, comme le demi-diamétre du parallele au rayon.

Reprenant les ſignes z, s, q, & mettant $\Sigma = \sqrt{1-s^2}$, D pour le chemin fait ſur un paralelle du Sphéroïde, & d pour le même chemin parcouru ſur un paralelle ſemblable de la Sphére, la commune différence de longitude étant la même, ſera $z : \Sigma :: D : d$ & $z - \Sigma : z :: D - d : D$. mais parce qu'elle étoit $z = \frac{\Sigma}{\sqrt{1-qs^2}}$, le rapport de $z - \Sigma$ à z ſera $1 - \sqrt{1-qs^2}$, & quand elle eſt la plus grande, c'eſt-à-dire, quand elle eſt $s = 1$, ce rapport eſt $1 - \sqrt{.978} = .01106$. Ainſi $D - d$ ne peut guéres aller au-delà d'un centiéme de toute la diſtance parcourue. On voit pareillement que ſur deux routes d'une égale quantité de chemin, faites l'une ſur un paralelle

de la Sphére, & l'autre sur un paralelle du Sphéroïde, les différences de longitude ne peuvent différer de plus de $\frac{1}{100}$ de la différence qui appartient au Sphéroïde.

III.

Trouver par la Table seconde si la Figure Sphéroïde de la Terre affecte & apporte quelque changement aux routes obliques d'un Vaisseau.

Que *EQ* (*Fig.* 5.) représente l'Équateur de la Carte Marine, ou un paralelle quelconque commun au Sphéroïde & à la Sphére, *KH* quelqu'autre paralelle de la Sphére, *CG* le même paralelle du Sphéroïde, *EK* un Méridien & *CK* les différences des parties Méridionales, partagez *CK* en *M*, élevez dessus la perpendiculaire *MR*, & du point *C* à la distance *ME*, décrivez un arc qui coupe *MR* en *R*, pour lors *R* sera le centre du Cercle

KCA, qui passe au travers de *K*, *C* & touche *EQ* en *A* & l'Angle *CAK* sera plus grand que tout autre Angle *CBK*, formé par les lignes tirées de *C*, *K* au point *B* en *EQ*, qui n'est pas le point de contact. Ainsi *AE par cette détermination est la différence en longitude de deux lieux A & C, & doit être prise pour la plus grande différence qu'il soit possible avec les Angles formés par la route d'un Vaisseau sur le Sphéroïde & sa route sur la Sphére.* Mais parce que *CK* ne peut point être comparé à *CE*, *AE* peut être supposé = *EM*; par conséquent si *EQ* est l'Équateur & *CG* le paralelle de 45°. *AE* sera = 3003. & l'Angle *CAK* se trouvera d'environ $30' \frac{2}{3}$ plus grand qu'il ne l'auroit été dans la supposition de toute autre différence de longitude *EB*.

Pour comparer l'angle *CAK* avec un autre Angle (*cak*) entre l'Équateur & une autre paralelle; de *A* com-

me centre il faudra faire passer par C l'Arc CN rencontrant AK en N. Il est évident que l'Angle CAK sera proportionel à $\frac{CN}{CA}$. Mais comme l'on peut prendre un arc si petit pour une ligne droite, & que AKE, ACE ne différent pas beaucoup d'Angles demi-droits, $\frac{CN}{CA}$ sera à peu près comme $\frac{CK}{CE}$; or $\frac{CK}{CE}$ dans sa plus grande amplitude à l'Équateur, n'étant que $\frac{21}{978}$, c'est-à-dire le rapport de la différence du demi-diamétre de l'Équateur & du rayon de courbure à ce rayon de courbure; il suit que la différence des Angles de la route qui a 45°. étoit $30\frac{2}{3}'$ ne peut point aller au-delà de 38′.

Dans la même Figure KN (Kn) exprimera la différence de la distance parcourue & sera à la différence du chemin fait sur le même Méridien

comme le Sinus de *KAE*(*KBE*) au rayon.

CONCLUSION.

Il résulte de tout ce que nous venons de voir, que les erreurs qu'entraîneroit dans la Navigation la supposition de la Terre sphérique, ne sont pas si considérables que l'on auroit pû l'imaginer, mais quelques petites qu'elles soient, je ne crois pas que l'on puisse donner de bonnes raisons pour ne pas vouloir les éviter. Dans les Sciences mixtes, une partie doit elle perdre tout le mérite de son exactitude, parce que d'autres parties ne sont pas susceptibles d'être également perfectionnées? Parce qu'il est difficile de prendre hauteur sur Mer ou de gouverner un Vaisseau, faudroit-il se servir d'un quart de Cercle dont la division porteroit 10′ ou 20′ & peut-être un demi-dégré d'erreur? Voudroit-on

naviger ſur une Carte où les Latitudes & les Giſemens s'écarteroient beaucoup des véritables poſitions, & dont la longueur auroit peut-être un pouce de trop proportionnellement à ſa largeur ? Cependant les erreurs des Tables & des Cartes dont nous nous ſervons actuellement, ſont de la nature de celles là; envain l'on s'écriera que dans la pratique de la Navigation il ſe commet de bien plus grandes erreurs, qui ſont inévitables! Car ſi l'on fait tant que de régler la route d'un Vaiſſeau ſur des Tables & des Cartes, quelles que ſoient ces erreurs inévitables, elles ſeront certainement encore augmentées dans certains cas par l'erreur totale de la Carte, & la ſomme des deux erreurs peut être fatale, tandis qu'une ſeule ne l'auroit pas été.

CONSEQUENCES

Qui dépendent de la Figure Sphéroïde de la Terre.

I.

Dans l'usage ordinaire de la Géographie, il n'y a nul inconvénient de prendre la Terre pour une Sphére parfaite : ainsi dans la projection commune du Globe, où l'on veut simplement marquer avec précision les longitudes & les latitudes, ce seroit un rafinement mal placé & capable de gâter l'ordonnance de la projection, que de vouloir représenter des Ellipses au lieu de mettre des cercles, & de chercher à exprimer la différence des diamétres de la Terre.

Mais il peut n'en être pas de même de la projection géométrale qui est faite ou supposée faite pour calculer,

avec plus de facilité les places des Eclipſes de Soleil. Il y a même aſſez d'apparence que ſi la Théorie de la Lune étoit parfaitement complete, les différences des principales phaſes des Eclipſes (c'eſt-à-dire les différences du commencement, de la fin, & de l'obſcurité totale) ſur la Sphére & ſur le Sphéroïde ſeroient très-ſenſibles en certaines circonſtances.

Les Aſtronomes ſeront à portée d'examiner tout l'effet de la Figure Sphéroïde de la Terre par rapport à la détermination de la Parallaxe du Soleil lorſqu'il y aura en 1761 une conjonction écliptique de Venus avec le Soleil.

II.

La Parallaxe de la Lune à une diſtance donnée du centre de la Terre, ſera la plus grande à l'Équateur, au Pôle elle ſera la plus petite, & dans

une latitude donnée, comme en *L* (*Fig.* 4.) si l'on méne perpendiculairement à *LC*, rayon de la courbure du Méridien au travers du centre, la ligne droite *AB* qui le coupe en *C*, la Parallaxe de la Lune à cette latitude sera à sa Parallaxe à l'Équateur, comme *LC*, à *QK*, & dans les Eclipses de Lune, un des diamétres de l'ombre de la Terre diminuera dans un rapport qu'il sera facile de connoître par la déclinaison du Soleil au tems de l'Eclipse.

III.

La Figure Sphéroïde de la Terre, produit aussi une petite Parallaxe dans l'Azimuth & l'ascension droite de la Lune.

Que *LG* (*Fig.* 4.) soit l'intersection du grand vertical du lieu *L*, avec le plan du Méridien, & *XY*, l'intersection d'un plan passant au travers du

centre de la Terre & parallele au premier, on peut nommer ce dernier le *Grand Vertical rationel*, & le premier le *Grand Vertical ſenſible*. Or non-ſeulement le demi-diamétre de la Terre, mais même *CK* diſtance des grands Verticaux a un rapport ſenſible avec la diſtance de la Lune au centre *K*; par conſéquent ſi nous ſuppoſons le lieu apparent de la Lune à l'Oueſt vrai, c'eſt-à-dire, ſi nous ſuppoſons que ſon centre ſoit dans le Vertical ſenſible, il doit s'écouler un petit intervalle de tems avant qu'il ſoit dans le Vertical rationel, & par la même raiſon le centre de la Lune aura paſſé le Vertical rationel à l'Eſt avant que d'arriver au Vertical ſenſible; mais l'eſpece du Sphéroïde & la latitude du lieu étant connues, on aura le rapport de *LC* à *CK*, je dis donc comme *LC* eſt à *CK*, de même eſt la Parallaxe horizontale de la Lune à

celle de ſon Azimuth.

Ainſi en ſuppoſant la latitude du lieu 45°. & la Parallaxe horizontale de la Lune $57'\frac{1}{2}$ ou $3450''$ CL ſera $=9944846$. & $CK=110610$, & la Parallaxe de l'Azimuth $38''$.

Ou ſi l'on veut calculer cette Parallaxe en aſcenſion droite; après avoir ſuppoſé que la Lune n'a point de déclinaiſon, je dis comme LC à QK, c'eſt-à-dire dans le cas préſent, comme 9944846 eſt à 10000000, de même $3450''$ eſt à $3469''$= la Parallaxe horizontale de la Lune à l'Équateur, & comme QK à KF, (c'eſt-à-dire 10000000 : 156426) de même $3469''$ eſt à $54''$ Parallaxe en aſcenſion droite demandée, ce qui fait en tems $3''.6$.

Si la Lune a de la déclinaiſon vers le Pôle élevé, il n'y a qu'à calculer la partie de ſon Arc diurne qui eſt interceptée par les deux plans Verti-

caux prolongés, & l'on aura la Parallaxe de l'ascension droite que l'on cherche.

Il faut observer la même régle par rapport aux autres Verticaux avec cette attention simplement que la distance des Verticaux *rationel* & *sensible*, laquelle est la mesure de la Parallaxe azimutale, décroit comme le Sinus de leur inclinaison au Méridien, & que dans le Méridien même elle s'évanouit.

SCHOLIE.

Si l'on pouvoit exactement calculer & observer le lieu de la Lune, les Observations Astronomiques fourniroient de nouvelles preuves de la véritable figure de la Terre, & il seroit beaucoup plus facile de renverser l'opinion de M. *Cassini* & de ses Partisans, car comme ils imaginent que la Terre est deux fois plus élevée vers les

les Pôles, qu'elle ne l'eſt réellement à l'Equateur, on peut ſuppoſer en gros (je n'en ai point fait le calcul) que la Parallaxe devroit en ce cas être double de celle que nous avons déterminée, & qu'elle monteroit quelque fois à 2′ en aſcenſion droite ou 8″ de tems d'une dénomination contraire, parce que le vertical ſenſible ſe trouveroit alors de l'autre côté du vertical rationel.

I V.

Enfin il n'y a ici d'Antipodes, à proprement parler qu'à l'Equateur & aux Pôles, & dans ce cas ils ne doivent être dans une poſition droite qu'en *G* & *L*; mais la poſition droite en *G* eſt *Gg*, par conſéquent, &c. la poſition directement contraire à celle-ci paſſe par *L* à l'autre extrémité du diamétre.

TABLE PREMIERE.

DES DEMI-DIAMETRES des paralelles de Latitude sur le Sphéroïde.

Dégrés.	Demi-diamétre du paralelle.	Dégrés.	Demi-diamétre du paralelle.	Dégrés.	Demi-diamétre du paralelle.
1	9998511.	13	9749129.	25	9080936.
2	9994043.	14	9709209.	26	9007000.
3	9986596.	15	9666383.	27	8930335.
4	9976174.	16	9620661.	28	8850961.
5	9962780.	17	9572053.	29	8768898.
6	9946413.	18	9520571.	30	8684166.
7	9927084.	19	9466228.	31	8596794.
8	9904791.	20	9409041.	32	8506798.
9	9879543.	21	9349021.	33	8414206.
10	9851345.	22	9286184.	34	8319040.
11	9820205.	23	9220547.	35	8221327.
12	9786130.	24	9152124.	36	8121092.

Degrés.	Demi-diamètre du paralelle.	Degrés.	Demi-diamètre du paralelle.	Degrés.	Demi-diamètre du paralelle.
37	8018364.	55	5778575.	73	2953580.
38	7913169.	56	5634692.	74	2784825.
39	7805539.	57	5489024.	75	2615169.
40	7695499.	58	5341619.	76	2444669.
41	7583084.	59	5192519.	77	2273378.
42	7468321.	60	5041768.	78	2101350.
43	7351245.	61	4889403.	79	1928642.
44	7231888.	62	4735501.	80	1755309.
45	7110282.	63	4580078.	81	1581407.
46	6986464.	64	4423193.	82	1406991.
47	6860468.	65	4264894.	83	1232118.
48	6732329.	66	4105227.	84	1056846.
49	6602085.	67	3944247.	85	0881230.
50	6469774.	68	3782000.	86	0705328.
51	6335434.	69	3618539.	87	0529197.
52	6199104.	70	3453915.	88	0352894.
53	6060823.	71	3288179.	89	0176475.
54	5920634.	72	3121383.	90	0

TABLE SECONDE,

Des parties Méridionales ſur le Sphéroïde & la Sphére, avec leurs différences.

D.	Sphéroide.	Sphére.	Différ.	D	Sphéroide.	Sphére.	Différ.
1	58. 7	60. 0	1. 3	22	1325. 3	1353. 7	28. 4
2	117. 3	120. 0	2. 7	23	1389. 0	1418. 6	29. 6
3	176. 1	180. 1	4. 0	24	1453. 3	1484. 1	30. 8
4	234. 9	240. 2	5. 3	25	1518. 0	1550. 0	32. 0
5	293. 8	300. 4	6. 6	26	1583. 3	1616. 5	33. 2
6	352. 7	360. 6	7. 9	27	1649. 1	1683. 5	34. 4
7	411. 8	421. 0	9. 2	28	1715. 6	1751. 2	35. 6
8	471. 0	481. 5	10. 5	29	1782. 7	1819. 5	36. 8
9	530. 4	542. 2	11. 8	30	1850. 5	1888. 4	37. 9
10	589. 9	603. 0	13. 1	31	1919. 0	1958. 0	39. 0
11	649. 7	664. 1	14. 4	32	1988. 2	2028. 3	40. 1
12	709. 6	725. 3	15. 7	33	2058. 3	2099. 5	41. 2
13	769. 8	786. 8	17. 0	34	2129. 1	2171. 4	42. 3
14	830. 2	848. 5	18. 3	35	2200. 8	2244. 2	43. 4
15	890. 9	910. 5	19. 6	36	2273. 4	2317. 9	44. 5
16	951. 8	972. 7	20. 9	37	2347. 0	2392. 6	45. 6
17	1013. 1	1035. 3	22. 2	38	2421. 6	2468. 3	46. 7
18	1074. 8	1098. 3	23. 5	39	2497. 2	2544. 9	47. 7
19	1136. 8	1161. 6	24. 8	40	2573. 9	2622. 6	48. 7
20	1199. 2	1225. 2	26. 0	41	2651. 8	2701. 5	49. 7
21	1262. 0	1289. 2	27. 2	42	2730. 9	2781. 6	50. 7

D.	Sphéroïde.	Sphère.	Differ.	D.	Sphéroïde.	Sphère.	Differ.
43	2811. 3	2863. 0	51. 7	67	5403. 9	5474. 0	70. 1
44	2893. 1	2945. 8	52. 7	68	5560. 2	5630. 8	70. 6
45	2976. 2	3029. 9	53. 7	69	5723. 5	5794. 6	71. 1
46	3060. 9	3115. 5	54. 6	70	5894. 4	5965. 9	71. 5
47	3147. 2	3202. 7	55. 5	71	6073. 7	6145. 6	71. 9
48	3235. 1	3291. 5	56. 4	72	6262. 4	6334. 7	72. 3
49	3324. 8	3382. 1	57. 3	73	6461. 6	6534. 3	72. 7
50	3416. 3	3474. 5	58. 2	74	6672. 6	6745. 7	73. 1
51	3509. 7	3568. 8	59. 1	75	6896. 8	6970. 3	73. 5
52	3605. 3	3665. 2	59. 9	76	7136. 2	7210. 0	73. 8
53	3703. 1	3763. 8	60. 7	77	7393. 0	7467. 1	74. 1
54	3803. 1	3864. 6	61. 5	78	7670. 1	7744. 5	74. 4
55	3905. 7	3968. 0	62. 3	79	7970. 9	8045. 6	74. 7
56	4010. 9	4073. 9	63. 0	80	8300. 2	8375. 2	75. 0
57	4118. 9	4182. 6	63. 7	81	8663. 8	8739. 0	75. 2
58	4229. 8	4294. 2	64. 4	82	9070. 0	9145. 4	75. 4
59	4344. 0	4409. 1	65. 1	83	9530. 2	9605. 8	75. 6
60	4461. 5	4527. 3	65. 8	84	10061. 1	10136. 9	75. 8
61	4582. 7	4649. 2	66. 5	85	10688. 7	10764. 6	75. 9
62	4707. 8	4775. 0	67. 2	86	11456. 5	11532. 5	76. 0
63	4837. 1	4904. 9	67. 8	87	12446. 0	12522. 1	76. 1
64	4971. 0	5039. 4	68. 4	88	13840. 4	13916. 4	76. 0
65	5109. 8	5178. 8	69. 0	89	16223. 8	16299. 5	75. 7
66	5254. 0	5323. 6	69. 6	90	∞	∞	37. 75

TABLE TROISIE'ME,

Arcs du Méridien sur le Sphéroïde en Minutes de l'Equateur.

D	Sphéroïde.	Sphère.	Differ.	D	Sphéroïde.	Sphère.	Differ.
1	58. 7	60. 0	1. 3	22	1293. 0	1320. 0	27. 0
2	117. 3	120. 0	2. 7	23	1352. 0	1380. 0	28. 0
3	176. 0	180. 0	4. 0	24	1411. 0	1440. 0	29. 0
4	234. 7	240. 0	5. 3	25	1470. 0	1500. 0	30. 0
5	293. 4	300. 0	6. 6	26	1529. 0	1560. 0	31. 0
6	352. 1	360. 0	7. 9	27	1588. 1	1620. 0	31. 9
7	410. 8	420. 0	9. 2	28	1647. 2	1680. 0	32. 8
8	469. 6	480. 0	10. 4	29	1706. 3	1740. 0	33 7
9	528. 3	540. 0	11. 7	30	1765. 5	1800. 0	34. 5
10	587. 0	600. 0	13. 0	31	1824. 7	1860. 0	35. 3
11	645. 8	660. 0	14. 2	32	1883. 9	1920. 0	36. 1
12	704. 5	720. 0	15. 5	33	1943. 1	1980. 0	36. 9
13	763. 3	780. 0	16. 7	34	2002. 4	2040. 0	37. 6
14	822. 1	840. 0	17. 9	35	2061. 7	2100. 0	38. 3
15	880. 9	900. 0	19. 1	36	2121. 0	2160. 0	39. 0
16	939. 7	960. 0	20. 3	37	2180. 4	2220. 0	39. 6
17	998. 5	1020. 0	21. 5	38	2239. 8	2280. 0	40. 2
18	1057. 4	1080. 0	22. 6	39	2299. 2	2340. 0	40. 8
19	1116. 3	1140. 0	23. 7	40	2358. 7	2400. 0	41. 3
20	1175. 2	1200. 0	24. 8	41	2418. 2	2460. 0	41. 8
21	1234. 1	1260. 0	25. 9	42	2477. 7	2520. 0	42. 3

D	Sphéroïde.	Sphère.	Differ.	D	Sphéroïde.	Sphère.	Differ.
43	2537. 3	2580. 0	42. 7	67	3977. 2	4020. 0	42. 8
44	2596. 8	2640. 0	43. 2	68	4037. 5	4080. 0	42. 5
45	2656. 6	2700. 0	43. 4	69	4097. 9	4140. 0	42. 1
46	2716. 4	2760. 0	43. 6	70	4158. 4	4200. 0	41. 6
47	2776. 2	2820. 0	43. 8	71	4218. 8	4260. 0	41. 2
48	2835. 9	2880. 0	44. 1	72	4279. 3	4320. 0	40. 7
49	2895. 5	2940. 0	44. 5	73	4339. 8	4380. 0	40. 2
50	2955. 3	3000. 0	44. 7	74	4400. 3	4440. 0	39. 7
51	3015. 2	3060. 0	44. 8	75	4460. 8	4500. 0	39. 2
52	3075. 0	3120. 0	44. 0	76	4521. 3	4560. 0	38. 7
53	3135. 0	3180. 0	45. 0	77	4581. 9	4620. 0	38. 1
54	3194. 9	3240. 0	45. 1	78	4642. 5	4680. 0	37. 5
55	3254. 9	3300. 0	45. 1	79	4703. 1	4740. 0	36. 9
56	3314. 9	3360. 0	45. 1	80	4763. 7	4800. 0	36. 3
57	3370. 0	3420. 0	45. 0	81	4824. 3	4860. 0	35. 7
58	3435. 1	3480. 0	44. 9	82	4884. 9	4920. 0	35. 1
59	3495. 2	3540. 0	44. 8	83	4945. 5	4980. 0	34. 5
60	3555. 3	3600. 0	44. 7	84	5006. 2	5040. 0	33. 8
61	3615. 5	3660. 0	44. 5	85	5066. 8	5100. 0	33. 2
62	3675. 7	3720. 0	44. 3	86	5127. 5	5160. 0	32. 5
63	3736. 0	3780. 0	44. 0	87	5188. 2	5220. 0	31. 8
64	3796. 2	3840. 0	43. 8	88	5248. 8	5280. 0	31. 2
65	3856. 5	3900. 0	43. 5	89	5309. 5	5340. 0	30. 5
66	3916. 8	3960. 0	43. 2	90	5370. 2	5400. 0	29. 8

SOLUTIONS ARITHMETIQUES
DES CARTES R'EDUITES.

Quoique ceux qui entendent les Mathématiques ayent dû trouver dans cet Ouvrage une explication étenduë, & ce me semble satisfaisante, de l'usage de ces Tables pour la Navigation, j'ai cru cependant devoir encore ajoûter ce qui suit, en faveur de ceux qui veulent seulement se renfermer dans la pratique.

I.

De la construction des Cartes Marines dans l'hypothèse de la Terre sphéroïde.

Cette construction différe de celle de *Mercator* (qui se trouve dans la plûpart des Livres de Navigation) uniquement en ce qu'il faut se servir de la Table seconde au lieu de la Table

des parties Méridionales pour marquer les Latitudes des lieux.

Ainsi dans la Figure 3e. si *AB* sont deux lieux, dont le premier est sous l'Equateur, & l'autre à 12°. de Latitude (Nord ou Sud) & que leur différence en Longitude (*AC*) soit de 5°. 30′, sur une échelle convenable, divisée en parties égales (lesquelles vaudront chacune une minute de Longitude), je fais $AC = 330$ nombre de minutes dans la différence donnée de Longitude & de *C* ayant élevé *CP* perpendiculaire à *AC*, sur la même échelle, je prens $CB = 709.6$ parties Méridionales pour la Latitude de 12°. (au-dessus ou au-dessous de *AC*, suivant que la Latitude est Nord ou Sud) & joignant alors *A* & *B*, *AB* exprimera la ligne de Rumb entre les deux lieux donnés, & l'Angle *ABC* l'Angle de la route en allant de l'un à l'autre.

Si *A* est à 16°. de Latitude & *B* à 27°. de Latitude (au Nord tous les deux) avec une différence de 5°. 30′. de Longitude comme auparavant de 1649.1. (parties Méridionales pour la plus grande Latitude 27°.) je retranche 951.8. (parties Méridionales pour la moindre Latitude 16°.) & je fais *CB* égal à leur différence 697.3. & *AC* ne se trouve plus être l'Equateur, mais il devient le paralelle de 16°. Latitude Nord.

Enfin par les mêmes suppositions que dans le cas précédent, mais avec cette différence que *A* soit au Sud de l'Equateur, *AC* deviendra le paralelle de 16°. Latitude Sud & *CB* sera égal à la somme de 1649.1. & 951.8. c'est-à-dire 2601.

Dans ces trois cas si l'on eût pris les longueurs de *CB* dans les Tables de *Mercator*, on auroit eû 725.3.710.8. 2656.2. qui auroient excédé de 15.

7.13.5.55.2. celles que nous avons trouvées.

Après que l'on a marqué suivant cette méthode d'après les Longitudes & les Latitudes données chaque Port, Isle, Cap, &c. qui doivent être sur la Carte, il resulte de cette construction.

I.

La ligne *AB* joignant deux lieux quelconques, fera avec le Méridien un Angle *ABC* égal à la route d'un Vaisseau d'un lieu à l'autre, c'est-à-dire, l'Angle dans lequel la ligne de Rumb doit couper chaque Méridien en allant de *A* à *B*, ou de *B* à *A*, & cet Angle se peut mesurer mécaniquement.

II.

Deux lignes paralelles au Méridien étant tirées par des lieux donnés *A* & *B*, & prolongées jusqu'à ce qu'elles

rencontrent l'échelle de l'Equateur; ou le bas de la Carte ſur lequel les dégrés de Longitude ſont de même marqués, renfermeront une diſtance comme *AC*, égale à la différence de Longitude des lieux donnés.

III.

Deux lignes paſſant ſur *A* & *C* parallelles à l'Equateur & prolongées juſqu'à ce qu'elles rencontrent le bord Oriental ou Occidental de la Carte, y comprendront une ligne égale à *CB* & les dégrés & minutes marqués ſur ce côté de la Carte donneront la différence de Latitude des lieux *A* & *B*.

IV.

La ligne *AB* appliquée ſur l'Equateur comme ſur une échelle ne fera pas connoître immédiatement la vraie

diſtance de *A* en *B* ſur la ligne de Rumb, mais ſervira à pouvoir trouver cette diſtance ; car la ligne *CB* n'eſt pas égale à l'arc du Méridien compris entre les paralelles de *AB*, elle n'en eſt que la repréſentation artificielle ; pareillement *AB* n'eſt pas la diſtance naturelle, mais ſimplement la diſtance artificielle de *A* à *B* ſur la ligne de Rumb, mais comme l'excès de la grandeur naturelle de *AB* & *CB* ſe fait dans la même proportion, il ne s'agit que de prendre ſur la Carte une ligne (*L*) dans un rapport à *AB* qui ſoit le même que celui de la longueur naturelle de l'arc du Méridien intercepté par les paralelles de *A* & *B* (voyez la Table troiſiéme) à la longueur artificielle *CB*, & cette ligne (*L*) appliquée ſur l'Equateur ou ſur un de ſes paralelles ſur la Carte, donnera la véritable diſtance que l'on cherche.

Mais pour la pratique en *CB*, il faut faire *Cb* égal à la longueur naturelle de l'arc du Méridien compris entre les paralelles de *A* & *B*, & par *b* tirer *ba* paralelle à *BA*, & rencontrant *AC* en *a*, *ab* sera la distance naturelle sur la ligne de Rumb *bEL.* 4.

D'après ces Remarques on peut résoudre, soit sur une Carte, soit par une construction Géométrique très-simple, les questions que l'on propose ordinairement touchant les Cartes réduites, & il sera facile de comprendre les raisons des Solutions Arithmétiques qui vont suivre.

II.

Solutions Arithmétiques des cas des Cartes réduites appliquées à la Terre Sphéroïde.

Les Elemens qui entrent dans la construction des Cartes réduites, se

réduisent à quatre, sçavoir; *la différence de Latitude, la différence de Longitude, l'Angle de la route, & la distance parcouruë*, car dans le Triangle *ABC* (*Fig.* 3.) l'Angle en *C* est un Angle droit & *CAB* est le complément de *ABC* Angle de la route; écartant ces deux Angles il reste *BC*, *AC*, *ABC*, & *AB*, dont deux étant donnés, les deux autres se peuvent trouver, par conséquent dans la construction des Cartes réduites, il y a en tout six Cas, car deux combinés quatre fois font six, mais il faut observer que,

I.

Quand on dit que la différence de Latitude est donnée, on suppose que les deux Latitudes sont connuës, & lorsque l'on cherche la différence de Latitude, l'on entend, qu'une Latitude est donnée avec la position de

l'autre, parce qu'autrement il ne seroit pas possible de sçavoir à quelle partie du quart de Cercle la différence de Latitude (soit donnée, soit désirée) appartiendroit, & par conséquent avec cette méthode la question resteroit toujours indéterminée.

II.

Il y a un des six cas dont nous venons de parler, que l'on ne peut pas résoudre par cette méthode, sçavoir celui-ci, quand sur *ab*, *AC* (*distance parcouruë & différence de Longitude*) étant donné, on veut trouver *cb* & *ABC différence de Latitude*, & *Angle de la route*; la solution n'en seroit pas difficile sur une Carte construite au point ordinaire, parce que *ab* ne différeroit point de *AB*, mais sur les Cartes réduites *cb* étant inconnu, son rapport à *CB* le sera aussi, & par conséquent

quent le rapport de *ab* à *AB*, & la ligne *AB* elle-même ne seront pas connus ; c'est pourquoi le triangle *ABC* ne peut être ni construit ni résolu ; les cas des Tables réduites que l'on peut résoudre, se réduiront par conséquent aux cinq suivans.

PREMIER CAS.

Etant données la différence de latitude *&* celle de longitude, *trouver* l'angle de la Route, *&* la distance parcouruë.

EXEMPLE.

[E]tant donnés:
- Latitude de *A*. 38°. *N* Parties Méridionales 2422.
- Latitude de *B*. 5. *N* Parties Méridionales 294.
- *AC* (diff. de Longit.) = 43°. = 2580
- (Donc *BC* = diff. . . . . . . = 2128

On demande 1. la Route *ABC*. 2. La diff. (*AB*) *ab*.

BC : *AC* :: R : la Tang. *ABC*.
2128 : 2580 :: 100000 : 121241 = Tang. 50°. 29'. demandée.

ou par les Log.:
13 : 41162 = Log. 2580 + Log. du Ray.
3. 32797 = Log. 2128.
Diff. 10. 08365 = Log. de la Tang. 50°. 29'.

1. $\left\{\begin{matrix} R : \text{de la Sec} : 50^{\circ}.\ 29'. \\ 100000 : 15715. \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} BC : AB \\ 2128 : 3344 \end{matrix}\right.$ = Distance artificielle.

Pour réduire cette distance à la naturelle du nombre des minutes contenuës en 38°. sçavoir (Table 3e.) 2240. il faut prendre le nombre des minutes de 5°. qui est 293, il restera 1947, & alors je dis :

$\left.\begin{matrix} BC : bc \\ 2128 : 1947 \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} AB : ab \\ 3344 : 3059 \end{matrix}\right.$ = distance demandée.

SECOND CAS.

Etant donnés la différence de latitude, & l'angle de la route, *trouver* la différence de longitude, & la distance parcourue.

EXEMPLE.

Etant donnés $\left\{\begin{matrix} \text{Lat. } AS.\ 25^{\circ}.\ \text{Part. Mérid. } 1518. \\ \text{Lat. } BN.\ 30^{\circ}.\ \text{Part. Mérid. } 1850. \\ \text{Donc } BC = \text{somme} \ldots = 3368. \\ \text{L'angle } ABC = 43^{\circ} \end{matrix}\right.$

On demande
1. *AC.*
2. *(AB) ab.*

1. $\left\{\begin{matrix} R : \text{la Tang. } ABC. \\ 100000 : 93251. \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} BC : AC. \\ 3368 : 3141' \end{matrix}\right.$ = 52°. 21' = Diff. de longit. demandée.

Par les Logar. { 3.52737 = Log. 3368.
9.96965 = Log. de la Tang. 43°.
13.49702 = ſom. — Log. du Ray. = Log. 3141.

2. Pour trouver (*AB*) *ab*, je dis comme dans le premier Exemple.

{ R : la Sec. 43°. / 100000 : 136733. } :: { *BC* : *AB*. / 3368 : 4605. Diſt. artific.

Alors ajoûtant à 1470. (minutes de 25° ſur le Sphéroïde par la Table 3ᵉ.) 1765. min. de 30°. la ſomme eſt 3235. par conſéquent

{ *BC* : *bc*. / 3368 : 3235 } :: { *AB* : *ab* / 4605 : 4423 = diſt. nat. que l'on cherche.

Si l'on s'étoit ſervi dans cet Exemple de la Table ordinaire des parties Méridionales, on auroit eu pour la différence de longitude 3206′. qui auroit excédé la véritable de 1°. 5′. & la diſtance (*ab*) auroit été 4512. & auroit pareillement ſurpaſſé la vraye diſtance de 89′, ou milles de l'Équateur.

TROISIÉME CAS.

La différence de latitude, & la distance parcouruë *étant données, trouver* la différence de longitude, & l'angle de la route.

EXEMPLE.

Etant donnés comme dans le second Exemple.	Latit. *S.A.* 25°. part. Mérid.	1518.
	Latit. *N.B.* 30°. part. Mérid.	1850.
	(Donc *BC* = somme =	3368.
	& *bc* (par la 3ᵉ. Table) =	3235)
	ab . . . . =	4423.

On demande 1. *AC.* 2. l'angle *ABC.*

1. $\left\{ \begin{matrix} bc : BC. \\ 3225 : 3368 \end{matrix} \right\} :: \left\{ \begin{matrix} ab : AB. \\ 4423 : 4605 \end{matrix} \right.$ = la dist. artific.

2. Du quarré de *AB* qui est . . 21206025.
ôtant le quarré de *BC* . . . . . . 11343424.

a racine quarrée de ce qui reste . . 9862601. qui est 3141, sera = *AC* la différence de longitude cherchée.

Ou par les Logarithmes, étant $ABq - BCq = \overline{AB + BC} \times \overline{AB - BC} = ACq$. au Logarit. de 7973 ($= AB + BC$) qui est . . . 3.90162.

Il n'y a qu'à ajouter le Logarithme de 1237.

(= *AB* — *BC*) qui est . . . . 3.00237.

6.99399.

la moitié de leur somme, c'est-à-dire . . 3.49699.
sera le Logarithme de 3141 = *AC*. ainsi qu'il a été trouvé auparavant.

3. { *AB* : *BC* / 4605 : 3368 } :: { R : Cos. *ABC*. / 100000 : Cos. 43°. = angle de la route.

QUATRIÉME CAS.

La différence de longitude, & l'angle de la Route *étant donnés*, *trouver* la différence de latitude, & le chemin parcouru.

EXEMPLE.

Etant donnés { *N*. Lat. de *B*. 54°. / Diff. de long. *AC*. 28° = 1680'. / *ABC* . . . . = 37°.

On demande
1. (*BC*) *bc*
2. (*AC*) *ab*.

1. { R : Co-Tang. *ABC* / 100000 : 132704 } :: { *AC* : *BC* / 1680 : 2229

Or les parties méridionales pour la latitude donnée de *B*, c'est-à-dire 54°. sont 3803, il faut donc soustraire

le nombre trouvé en dernier lieu 2229 de 3803, & chercher dans la Table seconde sous quel dégré, & sous quelles minutes de dégré de latitude les parties méridionales sont égales au restant 1574. en prenant une partie proportionnelle l'on trouve 25°. 50′ = la latitude de *A*, de sorte que la différence de latitude cherchée est 28°. 10′.

2. Pour trouver *AB*, je dis:

$$\left\{\begin{matrix} S.\,ABC : R \\ 60181 : 100000 \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} AC : AB \\ 1680 : 2791 \end{matrix}\right.$$

3. Dans la Table 3e. sur les minutes du 54° c'est-à-dire . . . . 3195.
il faut prendre les minutes du 25°. 50′. . . 1520.
le restant . . . . 1675.
est la quantité de l'arc *bc*, donc

$$\left\{\begin{matrix} BC : bc \\ 2229 : 1675 \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} AB : ab \\ 2791 : 2098 \end{matrix}\right.$$ = la dist. cherchée.

REMARQUE. Si dans cet Exemple la latitude de *B* eut été 20°. il auroit fallu soustraire de *BC* = 2229 les par-

ries méridionales de 20°, c'eſt-à-dire 1199, & le reſtant 1030 auroit fait connoître ce qu'étoit *A* de l'autre côté de l'Equateur à 17°. 16'. de latitude.

CINQUIÉME CAS.

Etant donnés la diſtance du chemin *&* l'angle de la route, *trouver* la différence de latitude, *&* la différence de longitude.

EXEMPLE.

Etant donnés
N. Lat. de *B* . . 45°.
Angle *ABC* . . . 23°.
Diſt. parcourue *ba*) 3700'.

On demande
1. (*BC*) *bc*.
2. *AC*.

1. R : Coſ. *ABC* :: *ba* : *bc*
100000 : 92050 :: 3700 3406 = l'arc du Méridien intercepté par les paralelles entre *A* & *B*.

2. Dans la Table troiſiéme, les minutes pour la latitude donnée de *B* (45°.) ſont 2656, par conſéquent ſi de *bc* = 3406, l'on ôte 2656, le reſ-

tant 750 rapporté à la même Table 3e. fait voir que *A* tombe à 12°. 46′. latitude Sud. Il faut alors ajouter les parties méridionales de 12°. 46′. (c'est-à-dire 756.) aux parties méridionales de 45°. (2976), & la somme 3732 se trouvera exprimer la ligne *BC* de la Carte.

$$3. \left\{ \begin{array}{l} bc : BC \\ 3406 : 3732 \end{array} \right\} :: \left\{ \begin{array}{l} ab : AB \\ 3700 : 4051 = AB \end{array} \right.$$

4. On ajoute comme dans le 3e. Cas au Logarithme . . . . . 7783 (= *AB* + *BC*) . . 3.89115
le Logarithme . . 319 (= *AB* − *BC*) . . 2.50379

6.39494

dont la moitié de la somme 3.19747
est le Logarithme de 1576 = *AC* demandé.

Toutes ces Opérations serviront pour les mêmes cas sur les Cartes Marines ordinaires, il faudra seulement réduire les arcs *bc*, en multipliant les dégrés en *bc* par 60. & y ajoutant les anciennes minutes, s'il y en a, au lieu de se servir de la Table 3e.

Je ne parle point des routes paralelles, parce que cet article eſt ſuffiſamment expliqué dans ce qui a été dit à la page 14, & je ne dis rien non plus des routes à la traverſe ; ce ſont là des combinaiſons des cas ſimples, dont la ſolution ſe trouve par les mêmes régles avec ſeulement un peu plus d'embarras.

Je n'ai plus que quelques remarques ſur la méthode même à ajouter ici.

I.

J'ai déja fait entrevoir (*pag.* 16.) la néceſſité de corriger nos Cartes & nos Tables ordinaires, parce que *dans les Sciences mixtes, il faut reſſerrer dans les bornes les plus étroites qu'il eſt poſſible par l'exactitude de la Théorie, les erreurs inévitables*. Auſſi voyons nous dans le ſecond Exemple que les erreurs des Cartes réduites ordinaires, peuvent

quelquefois confidérablement augmenter toutes les erreurs aufquelles le Vaiffeau eft déja expofé, & l'on peut imaginer des cas où ces erreurs feront beaucoup plus grandes que dans cet Exemple.

II.

Si la pofition de deux lieux (*A* & *B*) en longitude & en latitude déterminoit l'angle de la route, comme dans le premier Cas, la différence ne feroit pas bien confidérable, foit que l'on fit ufage des Tables ordinaires, foit que l'on fe fervit des Tables que nous avons calculées, & elle ne monteroit pas à plus de $\frac{1}{3}$ de dégré. (*V*. p. 14.) Mais en fuppofant, ce qui arrive trèsfouvent, qu'un Vaiffeau ne faffe pas fa route fur le même Rumb de *A* en *B*, mais dans toute autre direction donnée qui le conduife au lieu (*C*) à une

latitude connuë, que pour trouver sa route de *C* au port cherché *B*, il faille calculer la longitude de *C*, comme dans le second Cas, par la latitude de *A*, par celle de *C*, & par le chemin parcouru, & enfin que par la longitude de *C*, ainsi calculée avec les latitudes de *C* & *B*, l'angle de sa route future soit déterminé, il peut y avoir une grande différence entre le chemin du Vaisseau qui navigue sur la Sphére, & celui qui fait voile sur le Sphéroïde.

Un Exemple fera mieux entendre cette Remarque.

Que le lieu *A* soit sous l'Équateur, *B* à 40°. de latitude *n* à l'Ouest de *A* . . . . . 54°. 45'.

Alors par le premier Cas, l'angle de la route sur le Sphéroïde sera	51°. 55'.
Et sur la Sphére . . .	51°. 24'.
La différence n'étant que	31'.

Mais si le Vaisseau court sur le Sphéroïde *n. o.* vers *O*, c'est-à-dire sous un angle de 56°. 15'. jusqu'à ce qu'il arrive en *C* à la latitude de 37°. la différence de longitude de *A* & *C*, sera (par le second Cas) 58°. 32', & la route de *C* en *B* sera *n E*, c'est-à-dire sous un angle de 45°. au lieu que dans l'hypothése de la Sphére la différence de longitude de *A* & *C* sera 59°. 41'. & l'angle de sa route de *C* en *B* se trouvera 52°. 9'. plus grand qu'il ne doit être de 7°. 9'. c'est-à-dire des $\frac{3}{4}$ presque d'une pointe. En même-tems la différence des distances entre *C* & *B* sur le Sphéroïde & la Sphére, sera plus d'un 7[e] du total.

Le Lecteur pourra choisir pour s'éxercer d'autres Exemples, au lieu d'un lieu intermédiaire (*C*), qu'il en prenne deux ou trois (comme *C*, *D*, *E*) & il verra jusqu'où monte quelquefois l'erreur de la derniere route, quand tou-

tes les erreurs des autres longitudes ſe trouvent réunies & accumulées.

III.

Dans les latitudes au-deſſous de 28°. les Plans ou Cartes plates ſont préférables aux Cartes hydrographiques communes. De *o* latitude à 20°. les diſtances méridionales des Cartes réduites ſont plus grandes que celles des Cartes plates, quoique ſur ces dernieres les diſtances ſoient encore très-grandes. De 20°. à 28°. les diſtances méridionales ſur les Cartes plates diminuent, mais elles ne diminuent pas dans le rapport de l'excès des diſtances méridionales ſur les Cartes réduites ; enfin de 28° à 38°. cette diminution eſt très rapide ; car entre 33°. & 34°. elle eſt double, & à 38°. elle eſt un peu plus du triple de l'excès des Cartes réduites. D'où je

conclus que sur un tiers du quartier; il y a presentement au moins autant de raison pour corriger les Cartes Marines, qu'il y en avoit autrefois.

FIN.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences, du 29 Août 1742.

MESSIEURS de Maupertuis & de Buffon, ayant été chargés par ordre de l'Académie, d'examiner la Traduction des *Tables Loxodromiques* de M. MURDORCH, avec l'Application de ces Tables à la Navigation, par M. DE BRE'MOND, & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé que cet Ouvrage méritoit de paroître en notre Langue; en foi dequoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, ce 31 Août 1742. DORTOUS DE MAIRAN, *Secretaire de l'Académie Royale des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amés & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénechaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers, qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, Nous a très-humblement fait expoſer, que depuis qu'il Nous a plû lui donner par un Réglement nouveau de nouvelles marques de notre affection, Elle s'eſt appliquée avec plus de ſoin à cultiver les Sciences, qui font l'objet de ſes exercices; enſorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donné au Public, Elle ſeroit en état d'en produire d'autres, s'il Nous plaiſoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que nous lui avons accordées en datte du 6 Avril 1693.

L

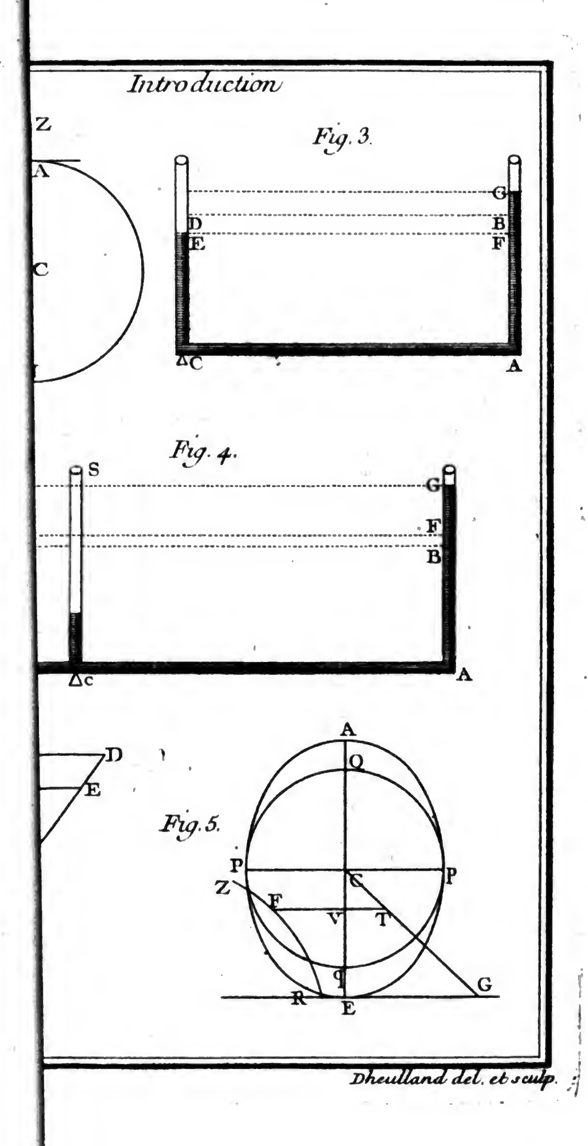
n'ayant point eu de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat, du 13 Août 1704, celles de 1713, & celles de 1717, étant aussi expirées; & désirant donner à notredite Académie en corps, & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public; Nous avons permis & permettons par ces présentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, *Toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de notredite Académie Royale des Sciences; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression*; & ce pendant le tems & espace de quinze années consécutives, à compter du jour de la datte desdites présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Imprimeurs-Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits,

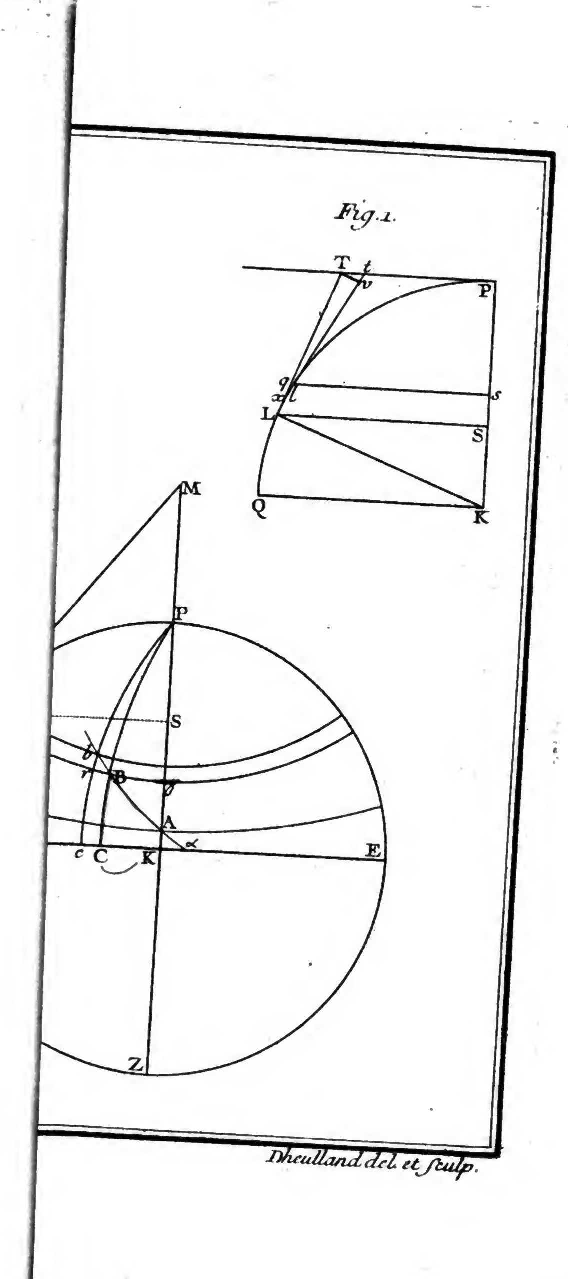
ſous quelque prétexte que ce ſoit ; d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles même ſéparées, ou autrement, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'Elle, & ſans cauſe, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles ; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que notredite Académie ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. & qu'avant que de les expoſer en vente, les manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis dans le même état, avec les Approbations & Certificats qui en auront été donnés, ès mains de notre très-cher & feal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin ; & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur Chauvelin : le tout à peine de nullité des préſentes ; du contenu deſquel-

les vous mandons & enjoignons de faire joüir notredite Académie ou ceux qui auront droit d'Elle & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenuë pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires; foy soit ajoûtée comme à l'Original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donné à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre, l'an de grace 1734, & de notre Regne le vingtiéme, Par le Roy en son Conseil: *Signé*. SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. *de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, num.* 792. *fol.* 775. *conformement aux Réglemens de* 1723. *qui font défenses, Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Art: CVIII. du même Réglement. A Paris le* 15 *Novembre* 1734. G. MARTIN, *Syndic.*

De l'Imprimerie de J. CHARDON.


Introduction
Fig. 3.
Z
A
C
D
E
G
B
F
C
A
Fig. 4.
S
G
F
B
c
A
D
E
Fig. 5.
A
Q
P
C
P
Z
F
V
T
q
G
R
E
Dheulland del. et sculp.


Fig. 1.
T
t
v
P
q
x
l
s
L
S
Q
K
M
P
S
b
r
B
A
c
C
K
E
Z
Dheulland del. et sculp.

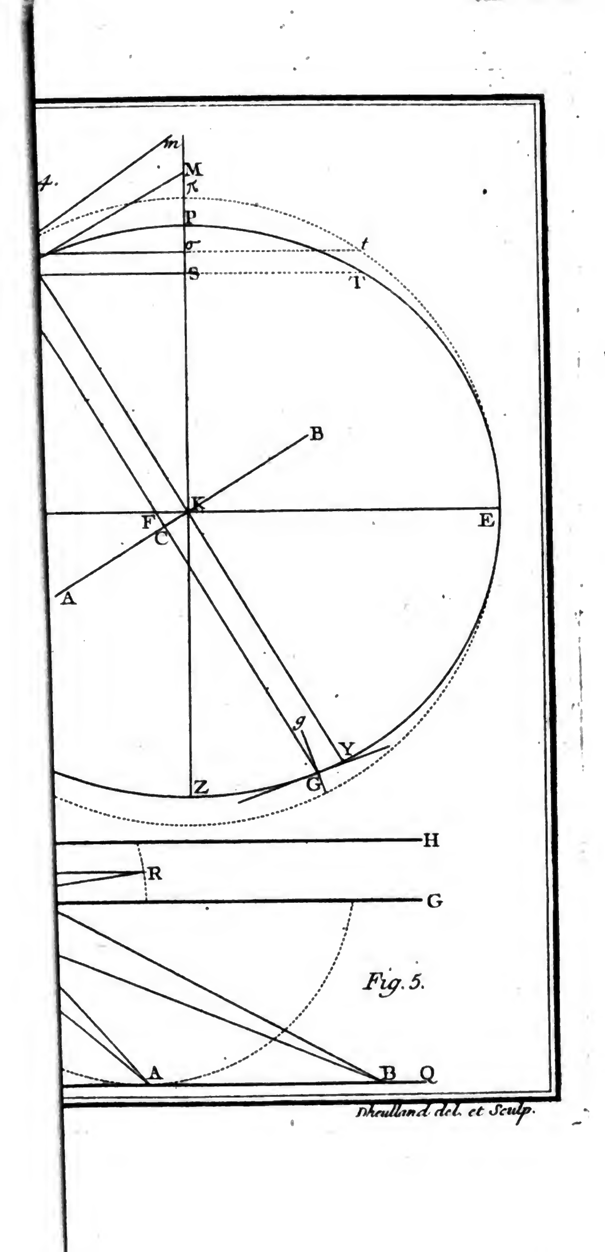
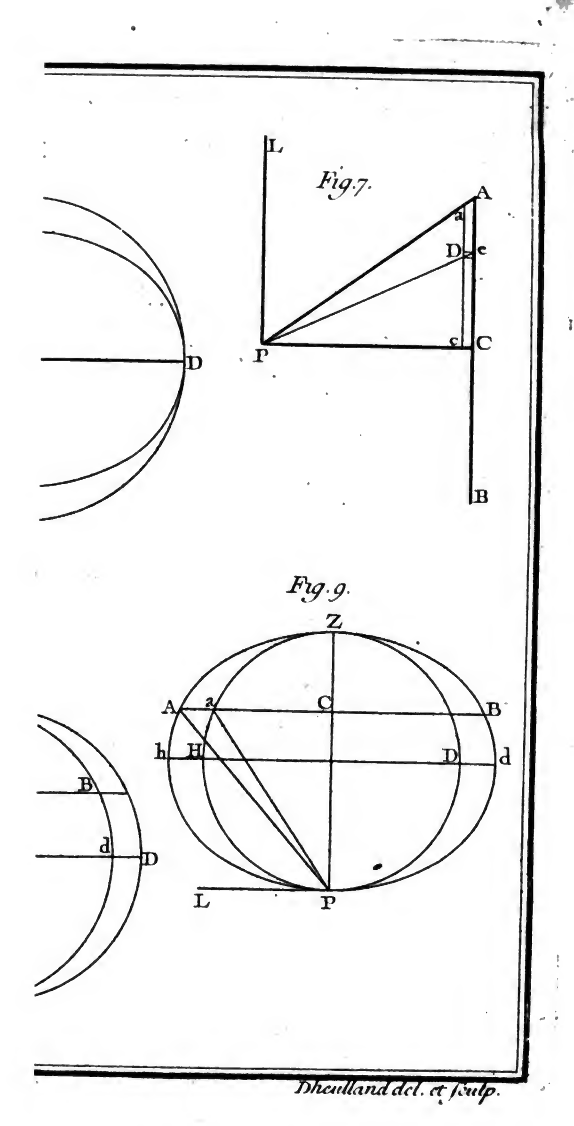


Fig. 5.

Dheulland del. et Sculp.



Dheulland del. et sculp.



